



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ESCURRIMIENTO SUPERFICIAL EN CUENCAS URBANAS : UN NUEVO
MÉTODO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO CIVIL

PRESENTA:

ZURUTUZA VERA, ERNESTO R.

Ciudad Universitaria, México, D.F.

1978



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. INTRODUCCION

1.1 Alcances del estudio

El objeto de este trabajo es presentar algunas de las nuevas técnicas para predicción de escurrimientos provocados por precipitaciones en zonas total o parcialmente urbanizadas.

El capítulo inicial está enfocado a los conceptos generales; incluye antecedentes, motivaciones y consecuencias de la urbanización en el régimen hidrológico.

En el capítulo dos se describen las características de las áreas en estudio, así como un análisis detallado del fenómeno precipitación-escorrimento, haciendo énfasis en el comportamiento de las variables más significativas.

En el tercer capítulo se exponen tres diferentes enfoques para la estimación de los escurrimientos: El empírico, generalmente sencillo en su aplicación pero limitado en su precisión; el semiempírico, útil para diseños preliminares, o cuencas muy uniformes; y el conceptual, desarrollado a partir de las ecuaciones de la hidrodinámica, más preciso pero requiere de mucha información y es muy elaborado. En el mismo capítulo se desarrollan algunos modelos para el cálculo; dos con el primer enfoque, tres con el segundo y cuatro con el tercero; se deducen las ecuaciones diferenciales de continuidad, y de cantidad de movimiento para un flujo unidimensional, y a partir de ellas se deducen los modelos conceptuales para el tránsito de avenidas.

En el cuarto capítulo se propone una nueva metodología, producto de estudios recientes en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, para el análisis de escurrimientos. El modelo es un primer intento, y por lo tanto está sujeto a nuevas revisiones y modificaciones.

Finalmente, la discusión sobre conclusiones y recomendaciones al

tema tratado se expone en el quinto capítulo.

Se incluye amplia bibliografía sobre el tópico, tanto de referencia como para consultas.

1.2 Efectos en la hidrología local causados por modificaciones en la cuenca natural

Con objeto de obtener una primera idea del fenómeno hidrológico en zonas que han sido modificadas por el hombre, es conveniente analizar algunos de los efectos típicos observados en aquellas cuencas cuyas condiciones naturales se han alterado al realizarse asentamientos humanos sobre ellas.

El resultado inmediato de la alteración de la superficie es el incremento en el gasto máximo instantáneo producto de una tormenta dada, así como la reducción de los tiempos característicos con que la cuenca responde a la precipitación (figura 1-1).

Otras consecuencias que trae consigo la actividad del hombre en una cuenca son: Reducción de la cantidad de agua infiltrada y almacenada superficialmente durante una tormenta; abatimiento de los niveles freáticos en los acuíferos, alimentados originalmente por el agua infiltrada en la zona; disminución del gasto base de los cauces (este último efecto puede pasar inadvertido, ya que también se registra un incremento en la cantidad total de aguas des-

cargadas a los cauces naturales); también han sido observados mayores volúmenes de escurrimiento, tanto en los registrados durante una tormenta, como en los medidos a lo largo de todo un período lluvioso.

Por otro lado, la intervención humana en las cuencas, también se ve reflejada en la pérdida de calidad en los cuerpos de agua, sean superficiales o subterráneos, y en la mayor erosión que experimenta la cuenca.

Cabe también mencionar aquí, las observaciones hechas acerca de la variación del microclima local dentro de aquellas áreas más densamente pobladas. Variaciones como el aumento de la precipitación media anual, el cambio en la temperatura de punto de rocío, etc. No obstante, estas observaciones son, hasta el momento, únicamente cualitativas, ya que para poder cuantificar este fenómeno con precisión, es necesario contar con registros de precipitación que daten de varios años antes de haberse iniciado la población sobre la región.

1.3 Antecedentes

La presente tesis es parte de una serie de trabajos sobre "Hidrología Urbana", realizados en el Instituto de Ingeniería, UNAM. Tiene como estudios antecedentes (en orden cronológico):

- a) "Estudio del Desague del Valle de México". Primer informe del Instituto de Ingeniería de la UNAM a la Secretaría de Recursos Hidráulicos (Febrero de 1976).
- b) DOMINGUEZ, M.R.; DOMINGUEZ, G.J.A.; ZURUTUZA, V.E. "Efectos Hidrológicos de la Urbanización, primera etapa". Informe del Instituto de Ingeniería a la Secretaría de Recursos Hidráulicos (Abril, 1976),
- c) DOMINGUEZ, M.R.; ZURUTUZA, V.E.; DOMINGUEZ, G.J.A. "Metodología para el Análisis y Diseño del Drenaje en Zonas Urbanas". VI Congreso Nacional de Hidráulica, Octubre de 1976, Acapulco, Gro., México.
- d) DOMINGUEZ, M.R.; ZURUTUZA, V.E.; BREÑA, P.A., entre otros. "Efectos Hidrológicos de la Urbanización". Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM, a la Secretaría de Recursos Hidráulicos (Noviembre de 1976).
- e) DOMINGUEZ, M.R.; LOZADA, B.A.; CAMELO, V.E.; PAGAN, R.F. "Estudio del Desague del Valle de México". Informe Final del Instituto de Ingeniería, UNAM, para la Comisión de Aguas del Valle de México de la Secretaría de Recursos Hidráulicos (Marzo de 1977).
- f) DOMINGUEZ, G.J.A. "Análisis de la Relación Lluvia-Escurre-

miento en Zonas Urbanas. Aplicación al Arroyo de Santa Cruz,
Estado de México". Tesis Profesional, Facultad de Ingeniería,
México, 1977.

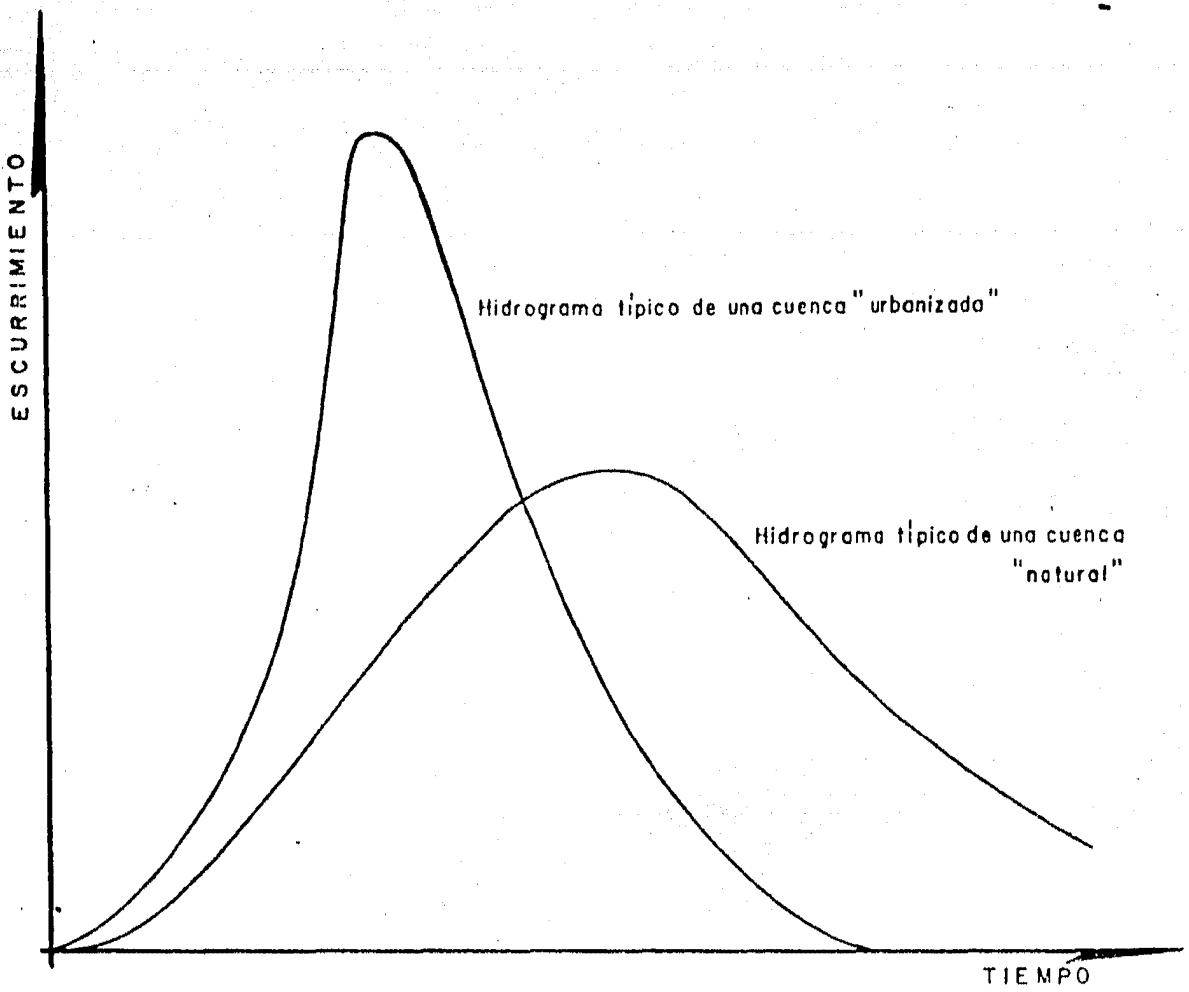


Figura 1-1 Comparación de la respuesta a la precipitación en cuencas "urbanizadas", y "no urbanizadas"

2. CONCEPTOS BASICOS

2.1 Urbanización

Para los fines de este trabajo, y con objeto de simplificarlo, la interpretación a la palabra "urbanización" ha sido modificada de su definición gramatical que dice: "Acción y efecto de convertir en poblado una porción de terreno, o prepararlo para ello, abriendo calles y dotándolas de luz, empedrado, y demás servicios municipales"; deriva del Latín urbanus; de urbs, urbis, ciudad.

El sentido que en el presente trabajo se ha dado a esta palabra, incluye cualquier asentamiento humano que modifique una porción de terreno, alterando su drenaje natural y su escurrimiento superficial característico. Las modificaciones al terreno pueden ser tales como: abrir calles, construir caminos, denudar el terreno para establecer núcleos residenciales o industriales, etc., pero los servicios municipales restantes mencionados en la definición gramatical, pueden o no estar incluidos en el área por analizar, ya que son ajenos a los objetivos de este estudio.

No obstante, la definición anterior es todavía demasiado amplia, y es conveniente hacer una subdivisión para definir distintas calidades de urbanización.

2.1.1 Tipos de urbanización

Zona no urbanizada o natural. -Las zonas consideradas dentro de esta clasificación son aquellas cuyas características edafológicas no han sufrido modificaciones notables. En ellas el drenaje se efectúa según la topografía natural del terreno.

Zona suburbana. -Son regiones en donde no prevalece la vegetación propia de la región, y aún cuando no se han abierto calles con alineación definida, existen en forma dispersa; aquellas donde se realizó un desmonte para poblar el lugar, ocuparlo para usos agríco-

las, industriales o sencillamente la han denudado al satisfacer sus necesidades las poblaciones contiguas. Este tipo de zonas, tiene generalmente una vegetación escasa, formada con frecuencia por pastizales de muy pequeña altura y matorrales. El drenaje pluvial se realiza conforme la topografía del terreno.

Zona semiurbana. -Corresponden a este tipo, aquellas donde se han establecido núcleos de población o industriales; núcleos donde se han construido calles que muestran un alineamiento más o menos definido, y los caminos abiertos son en su mayoría empedrados, de terracería o brechas. El drenaje pluvial se realiza, en ocasiones, por canales o cunetas construidas en las orillas de las calles o caminos, y, otras veces, encausado por el alineamiento de las calles, pero siempre superficialmente. Por lo tanto, las distancias que recorre el agua precipitada hasta descargar a los colectores o cauces que la desalojan, son menores que las naturales.

Este tipo de zonas prolifera en los cinturones que rodean a las grandes ciudades.

Áreas urbanas. -Han sido clasificadas como urbanas las regiones cuyas vías de comunicación son, en su mayoría, pavimentadas; la densidad de áreas construidas, residenciales o industriales, es alta; su drenaje pluvial está formado por un sistema de canales y colectores artificiales, diseñados expreso para desalojar el agua de llu-

via.

Así, una cuenca cualquiera podrá estar formada, dependiendo generalmente de su magnitud, por uno o varios tipos de urbanización, correspondiendo a su drenaje una forma de análisis específica.

2.2 Elementos típicos en el estudio del escurrimiento superficial

Para tener una visión más amplia del fenómeno que se estudia, es conveniente ubicarlo dentro del curso cíclico natural de regeneración continua del agua, denominado Ciclo Hidrológico.

2.2.1 Ciclo Hidrológico

Dado que no tiene un origen definido, se supondrá que parte de la evaporación en las grandes masas de agua localizadas sobre la corteza terrestre.

El agua evaporada es transportada por las corrientes de aire de la atmósfera hasta que en ésta se cumplen las condiciones de presión y humedad apropiadas para que el vapor de agua se condense y precipite sobre el terreno. De la cantidad de agua precipitada, una parte se evapora nuevamente en el momento de ir cayendo, y otra, la mayor parte, cae sobre el terreno.

La cantidad que llega a la superficie satisface primero las depresiones existentes sobre ella, o se almacena superficialmente para

formar un gradiente hidráulico. Simultáneamente se infiltra hacia las capas inferiores del terreno y se evapora.

Una parte de la precipitación cae directamente sobre las corrientes superficiales o en los grandes almacenamientos de agua.

Por otro lado, el agua infiltrada puede seguir alguno de los siguientes caminos:

- a) Las infiltraciones poco profundas son adsorbidas, total o parcialmente, por la vegetación superficial, que devuelve el agua a la atmósfera por medio de la transpiración.
- b) El agua no utilizada por la vegetación, escurre subsuperficialmente descargando a los cauces o almacenamientos superficiales.
- c) Se infiltra más profundamente para recargar los depósitos subterráneos o escurrir subterráneamente para finalmente descargar a la superficie, en lagos, océanos, cauces, etc., donde se vuelve a evaporar.

Una representación esquemática del ciclo descrito, se muestra en la figura 2-1, donde la secuencia o flujo del agua se indica mediante flechas acotadas.

2.2.2 Datos para el análisis

De la descripción anterior se deduce que para estimar el escurrimiento producido por una tormenta en una zona, es necesario contar, entre otros datos, con:

- a) Las características propias de la tormenta.
- b) Las características físicas de drenaje y capacidad de infiltración representativas en la región.

2.2.2.1 Tormenta de diseño

El diseño de la tormenta debe hacerse con base en dos consideraciones: El análisis estadístico de los datos históricos de la precipitación local, y un estudio económico que determine el período de retorno de la precipitación probable para el diseño.

2.2.2.2 Características físicas de la cuenca

Para calcular o estimar, por ejemplo, la infiltración y la retención en la cuenca, es necesario contar con un mapa de la región donde se indiquen la topografía y características del drenaje; otro que defina la geología local; un mapa más con el uso del suelo, y, si es posible, construir un plano con el uso futuro del suelo en estudio, donde se muestre el posible sistema de drenaje futuro.

Con esto quedan definidos los elementos básicos para realizar el

estudio de los escurrimientos pluviales en la zona.

2.3 Variables características

2.3.1 Lluvia efectiva

El agua que llega a escurrir por sobre la superficie hasta la salida de la cuenca, es sólo una parte de la total precipitada. A esta lluvia que escurre superficialmente se le ha denominado precipitación efectiva. La cantidad de lluvia restante, aquella que se infiltra, evapora o queda retenida en la superficie, corresponde, en este trabajo, a las pérdidas de la precipitación (fig. 2-2).

Naturalmente, la precipitación efectiva tendrá una distribución en el tiempo que dependerá de la forma de la tormenta (fig. 2-3) y de como se lleve a cabo el fenómeno de las pérdidas, principalmente la infiltración.

2.3.2 Pérdidas

Para hacer una estimación razonable de esta variable, es conveniente insistir nuevamente en el hecho de haber considerado como pérdidas, a la evaporación durante la tormenta, los almacenamientos en depresiones, y la infiltración; por lo tanto, al llevar a cabo la predicción de las pérdidas, es necesario tener en cuenta cuales son los factores que intervienen en el fenómeno, y qué factores son

los que se consideran en la evaluación.

A continuación se hace un breve análisis de cada una de las componentes de las pérdidas.

2.3.2.1 Evaporación durante la tormenta

Las condiciones prevalecientes de humedad, temperatura y presión atmosférica durante la tormenta, generalmente son poco favorables para la evaporación; la duración de las precipitaciones críticas en zonas urbanas, generalmente corta (de alta intensidad), tampoco favorece la evaporación; por lo tanto, la evaporación durante las tormentas puede considerarse despreciable.

2.3.2.2 Almacenamientos en las depresiones superficiales

El volumen de agua retenido, comparado con el total precipitado, frecuentemente resulta de poca importancia, no obstante este tipo de pérdidas ejerce gran efecto al comenzar la tormenta, ya que la precipitación inicial queda atrapada en las depresiones, ocasionando que el escurrimiento directo se retrase, y se agudice la infiltración.

Una forma de estimar el volumen de las depresiones, es medirlas en muestras aleatorias de terreno que sean representativas de toda la cuenca, y con base en los parámetros estadísticos resultantes, obtener un valor característico para toda la cuenca.

2.3.2.3 Infiltración

Es la parte más importante de las pérdidas. Depende principalmente de la estructura subsuperficial del terreno (permeabilidad), de la pendiente de la cuenca, y de la humedad al iniciarse la tormenta y durante ella (precipitación antecedente).

Al comenzar la lluvia, las capas superiores del suelo generalmente contienen una cantidad reducida de agua en su estructura, por lo cual, gran parte de la precipitación inicial contribuye a satisfacer la capacidad de campo del suelo (Ref. 16); la cantidad restante se infiltra, y si la intensidad de la lluvia excede la capacidad de infiltración del terreno (Ref. 16), se inicia el llenado de las depresiones superficiales y posteriormente el escurrimiento superficial.

La capacidad de infiltración del terreno se reduce conforme avanza la tormenta y se satura el terreno. Antiguamente (Ref. 10) se suponía que la capacidad de infiltración se estabilizaba en un valor característico, si la duración de la tormenta así lo permitía (coeficiente de infiltración, fig. 2-4). Nuevas teorías, basadas en recientes investigaciones en el Instituto de Ingeniería de la UNAM proponen una función de las pérdidas donde la infiltración incluso pueda ser negativa, lo que supone que se llega a un estado de saturación del suelo, tal que el agua emerja para aportar al escu-

rrimiento superficial (capítulo 4 de este trabajo).

Como se deduce, la complejidad para valuar las pérdidas crece más que proporcionalmente al intentar incluir un segundo o tercer factor que la afecte, es por eso que los métodos actuales para valuar pérdidas ofrecen poca precisión y confiabilidad, y entre más aproximados son, requieren de mayor información; por lo tanto, el método que se considere para estimarlas, deberá escogerse con base en la cantidad y calidad de información disponible, y en la precisión deseada al calcularlas.

En el inciso siguiente se presentan algunos de los métodos más usados para estimar las pérdidas durante una tormenta.

2.3.2.4 Métodos para valuar las pérdidas

Fundamentalmente existen tres criterios para estimar las pérdidas:

- a) Coeficiente de escurrimiento: Se basa en considerarlas como variables a lo largo de toda la tormenta (fig. 2-5). Consiste en aplicar a la lluvia total un factor, definido como la relación entre el volumen que escurre superficialmente y aquel que se precipita sobre la zona. El criterio es totalmente empírico, y para su aplicación se requiere una amplia experiencia, además de contar con mediciones de lluvias y escurrimientos simultáneas que permitan tener una idea de ese coeficiente. Si

el coeficiente no se escoge adecuadamente, puede originar errores de consideración en la estimación de las pérdidas.

- b) Índice de infiltración: Consiste en restarle a la altura de precipitación en cada instante una lámina constante de agua, que es precisamente el índice de infiltración.

Aún cuando el criterio adolece aproximadamente de los mismos inconvenientes que el anterior, se han desarrollado metodologías para la estimación del índice. Metodologías como tablas y gráficas que permiten considerar por separado cada uno de los factores que influyen en esta variable. A continuación se presenta un método concebido por Hicks, para la ciudad de los Angeles. (Ref. 7).

Consiste en adoptar una de las curvas mostradas en la figura 2-6, y relacionarla con la altura de precipitación media en la zona -eje de las ordenadas-, para obtener un índice de pérdidas, constante a lo largo del proceso de la lluvia -eje de las abscisas-.

La adopción de la curva apropiada se basa en la estimación de un factor que toma en cuenta la precipitación antecedente, según la relación:

$$M = \frac{E (d_{60} + 1)}{10} + A$$

donde

$$E + \left(0.9 - \frac{e_{60}}{e_{\text{anual}}} \right)$$

$$d_{60} = P_{1-4} + \frac{P_{5-9}}{2} + \frac{P_{10-14}}{4} + \frac{P_{15-20}}{6.67} + \frac{P_{31-60}}{10}$$

$$A = 0.11$$

Para los cuales,

e_{60} es la evaporación media en los 60 días anteriores al día de la tormenta analizada.

e_{anual} es la evaporación media anual en la zona.

d_{60} es un factor que toma en cuenta la precipitación: 1) durante los cuatro días anteriores a la tormenta analizada (P_{1-4}); 2) durante los días 5 a 9, anteriores a la lluvia que se analiza (P_{5-9}); etc., hasta el día 60 antes de la fecha que se estudia.

Con el valor de M así obtenido, más el tipo de suelo y su cobertura vegetal, se obtiene, de la tabla I, el número de la curva por utilizar.

c) Método del U.S. Soil Conservation Service

El método, concebido empíricamente, se desarrolló en los Es-

T A B L A I

TIPO DE SUELO	COBERTURA	NUMEROS DE LA CURVA PARA VALORES DE M				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
ARENOSO	CON PASTO O HIERBA MENUDA	1	2	4	6	8
	SIN COBERTURA VEGETAL	3	4	6	8	10
ARCILLOSO	CON PASTO O HIERBA MENUDA	2	3	5	7	9
	SIN COBERTURA VEGETAL	5	6	8	10	12

tados Unidos relacionando mediciones simultáneas de lluvias y escurrimientos de cuencas agrícolas, con las características superficiales, de drenaje y de precipitación antecedente en las mismas.

El modelo proporciona directamente el valor de la lluvia efectiva producida por la tormenta sobre la cuenca.

La estimación se lleva a cabo en la figura 2-7. En ella la lámina total precipitada se proyecta verticalmente hasta intersectar la curva cuyo valor N corresponde al de la cuenca en estudio. Proyectando horizontalmente el punto de intersección en el eje de las abscisas se obtiene la altura de precipitación efectiva.

La estimación del número N, que depende de las características de drenaje, superficiales y del uso del suelo en la cuenca, se efectúa con base en la tabla 2-B. En la tabla se encuentran los valores de N para varios tipos de cuencas. Estos valores de N son aplicables a cuencas cuya precipitación antecedente esta dentro de las condiciones de precipitación antecedente para las avenidas que anualmente se presentaron en las cuencas analizadas por el U.S. Soil Conservation Service. Los rangos de estas precipitaciones para avenidas medias anuales son los mostrados en la tabla 2-C, caso II. En caso

TABLA 2-3 SELECCION DEL NUMERO DE ESCURRIMIENTO N

Uso de la tierra o cobertura	Condición de la superficie	Tipo de suelo			
		A	B	C	D
Bosques (sembrados y cultivados)	Ralo, baja transpiración	45	66	77	83
	Normal, transpiración media	36	60	73	79
	Espeso o alta transpiración	25	55	70	77
Caminos	De tierra	72	82	87	89
	Superficie dura	74	84	90	92
Bosques naturales	Muy ralo o baja transpiración	56	75	86	91
	Ralo, baja transpiración	46	68	78	84
	Normal, transpiración media	36	60	70	76
	Espeso, alta transpiración	26	52	62	69
	Muy espeso, alta transpiración	15	44	54	61
Descanso (sin cultivo)	Surcos rectos	77	86	91	94
Cultivos de surco	Surcos rectos	70	80	87	90
	Surcos en curvas de nivel	67	77	83	87
	Terrazas	64	73	79	82
Cereales	Surcos rectos	64	76	84	88
	Surcos en curvas de nivel	62	74	82	85
	Terrazas	60	71	79	82
Leguminosas (sembradas con maquinaria o al voleo) o potrero de rotación	Surcos rectos	62	75	83	87
	Surcos en curvas de nivel	60	72	81	84
	Terrazas	57	70	78	82
Pastizal	Pobre	68	79	86	89
	Normal	49	69	79	84
	Bueno	39	61	74	80
	Curvas de nivel, pobre	47	67	81	88
	Curvas de nivel, normal	25	59	75	83
	Curvas de nivel, bueno	6	35	70	79
Potrero (permanente)	Normal	30	58	71	78
Superficie impermeable		100	100	100	100

T I P O S D E S U E L O

Tipo A. (Eskurrimiento mínimo). Incluye gravas y arenas de tamaño medio, limpias, y mezcla de ambas.

Tipo B. Incluye arenas finas, limos orgánicos e inorgánicos, mezclas de arena y limo.

Tipo C. Comprende arenas muy finas, arcillas de baja plasticidad, mezclas de arena, limo y arcilla.

Tipo D. (Eskurrimiento máximo). Incluye principalmente arcillas de alta plasticidad, suelos poco profundos con subhorizontes casi impermeables cerca de la superficie.

TABLA 2-C

PRECIPITACION ANTECEDENTE Y FACTORES DE CORRECCION
PARA LOS NUMEROS DE ESCURRIMIENTO

CONDICION	DESCRIPCION	PRECIPITACION DURANTE LOS CINCO DIAS ANTERIORES AL DE LA TORMENTA ANA- LIZADA
<u>I</u>	SUELO SECO	MENOS DE 3 CENTIMETROS
<u>II</u>	SEMI HUMEDO	ENTRE 3 Y 6 CENTIMETROS
<u>III</u>	HUMEDO	MAS DE 6 CENTIMETROS



NUMERO DE LA CURVA PARA LA CONDICION II FACTOR PARA CORREGIR EL NUMERO DE LA CURVA PARA LA CONDICION III Y CONVERTIRLO EN CURVA PARA CONDICION:

	<u>I</u>	<u>III</u>
10	0.40	2.22
20	0.45	1.85
30	0.50	1.67
40	0.55	1.50
50	0.62	1.40
60	0.67	1.30
70	0.73	1.21
80	0.79	1.14
90	0.87	1.07
100	1.00	1.00

de tener precipitaciones antecedentes fuera de estos rangos, en la misma tabla 2-C se presentan los factores para corregir el número N.

Si la información sobre la cuenca analizada es suficiente, se recomienda dividir la cuenca en varias áreas, cada una de las cuales sea homogénea, obteniendo al final un promedio pesado del valor de N, por ejemplo: si la cuenca se divide en n áreas homogéneas, y a cada área A_i le corresponde una N_i , entonces:

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^n (N_i A_i)}{A_c}$$

donde $A_c = \sum_{i=1}^n (A_i)$, y \bar{N} es el promedio pesado de N

2.3.3 Tiempos representativos

Otras de las variables características en el proceso de escurrimiento, son los tiempos típicos de respuesta a la precipitación sobre la cuenca.

En la parte superior de la figura 2-8 se ha representado la distribución en el tiempo de la precipitación promedio en toda el área (hie-

tograma); en la parte inferior, la respuesta de la cuenca en el punto de descarga (en forma de hidrograma).

Las definiciones que se dan en seguida se encuentran acotadas en la misma figura 2-8.

Se define tiempo de lluvia (T_{ll}), a la duración de la tormenta, desde que ésta principia (t_o), hasta que deja de llover totalmente (t_{ll}).

La duración del proceso (T_o), es el tiempo total que dura el fenómeno, desde que se inicia la lluvia (t_o), hasta que termina el escurrimiento directo del agua (t_t).

T_R es el tiempo de retraso, que va desde el centroide de la lluvia en exceso (t_m), hasta que se presenta el gasto pico (t_p).

El fenómeno de escurrimiento directo tiene una duración total T_b , que va desde que se inicia el escurrimiento directo (t_e), hasta que deja de escurrir superficialmente el agua (t_t).

Por otro lado, la aportación de agua de las laderas hacia los cauces que drenan el área, no cesa en el momento en que termina de llover, sino que siguen contribuyendo con escurrimiento superficial hasta un cierto tiempo después. En ese momento, en la curva de descargas (hidrograma), se presenta un punto de inflexión (tiempo t_i), a partir del cual se lleva a cabo el vaciado de los cauces de

drenaje. Al tiempo en que se realiza este vaciado se le denomina tiempo de vaciado (T_v).

Otro tiempo característico es el llamado tiempo de concentración (T_c), el cual, para un punto dado, se define como el tiempo que tardaría una partícula de agua en viajar desde el punto considerado, hasta la salida de la cuenca.

La importancia de estos tiempos y la forma de calcularlos, depende, como se verá más adelante, del método utilizado para la estimación del escurrimiento en la cuenca estudiada, pero en general, todos ellos dependen de:

- a) Las características de la tormenta.
- b) Las características morfológicas y fisiográficas de la cuenca.
- c) Las características superficiales de la cuenca.

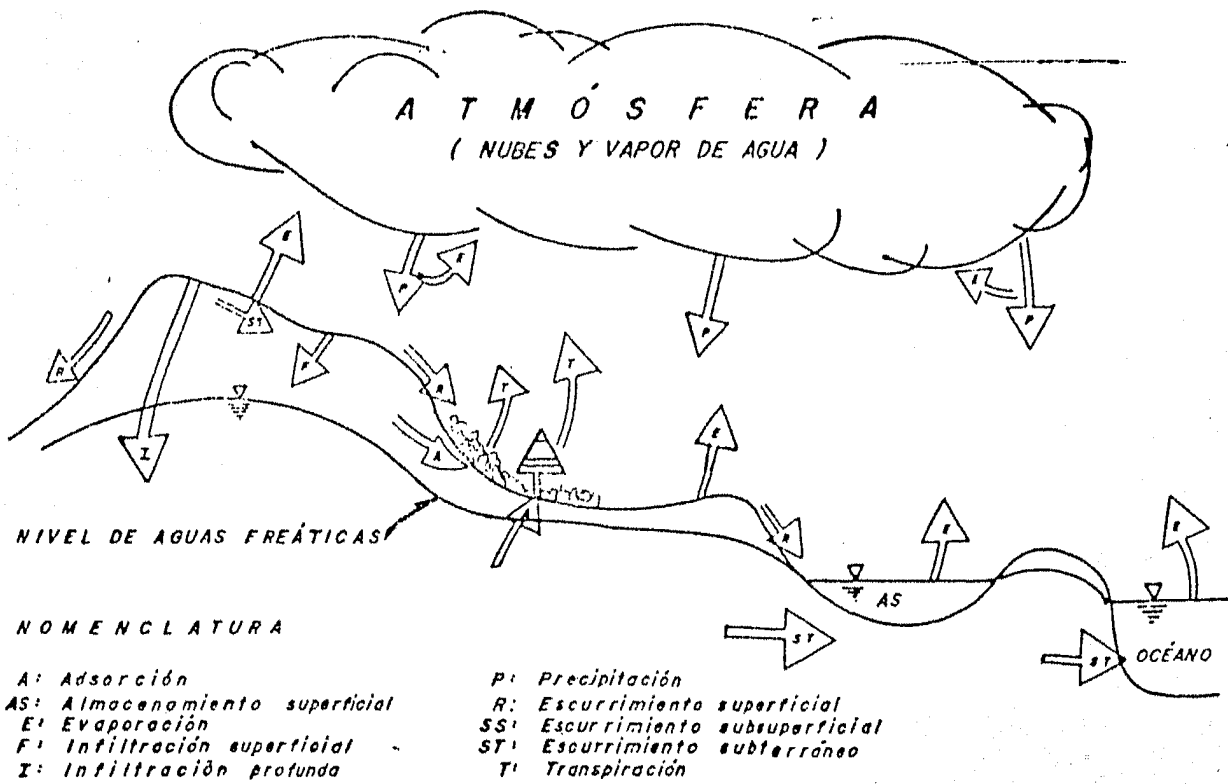


FIGURA 2-1 Representación del Ciclo Hidrológico

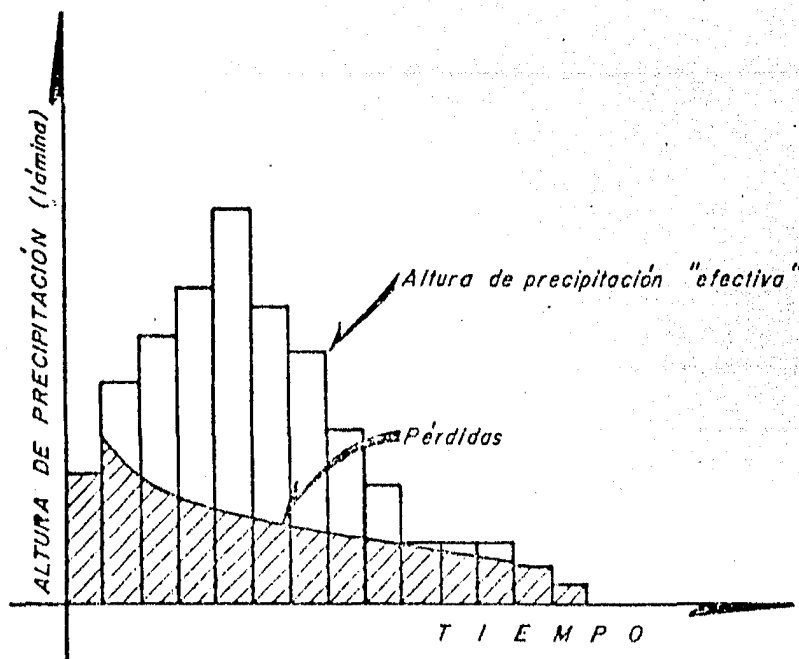


FIGURA 2-2 Lluvia efectiva y pérdidas

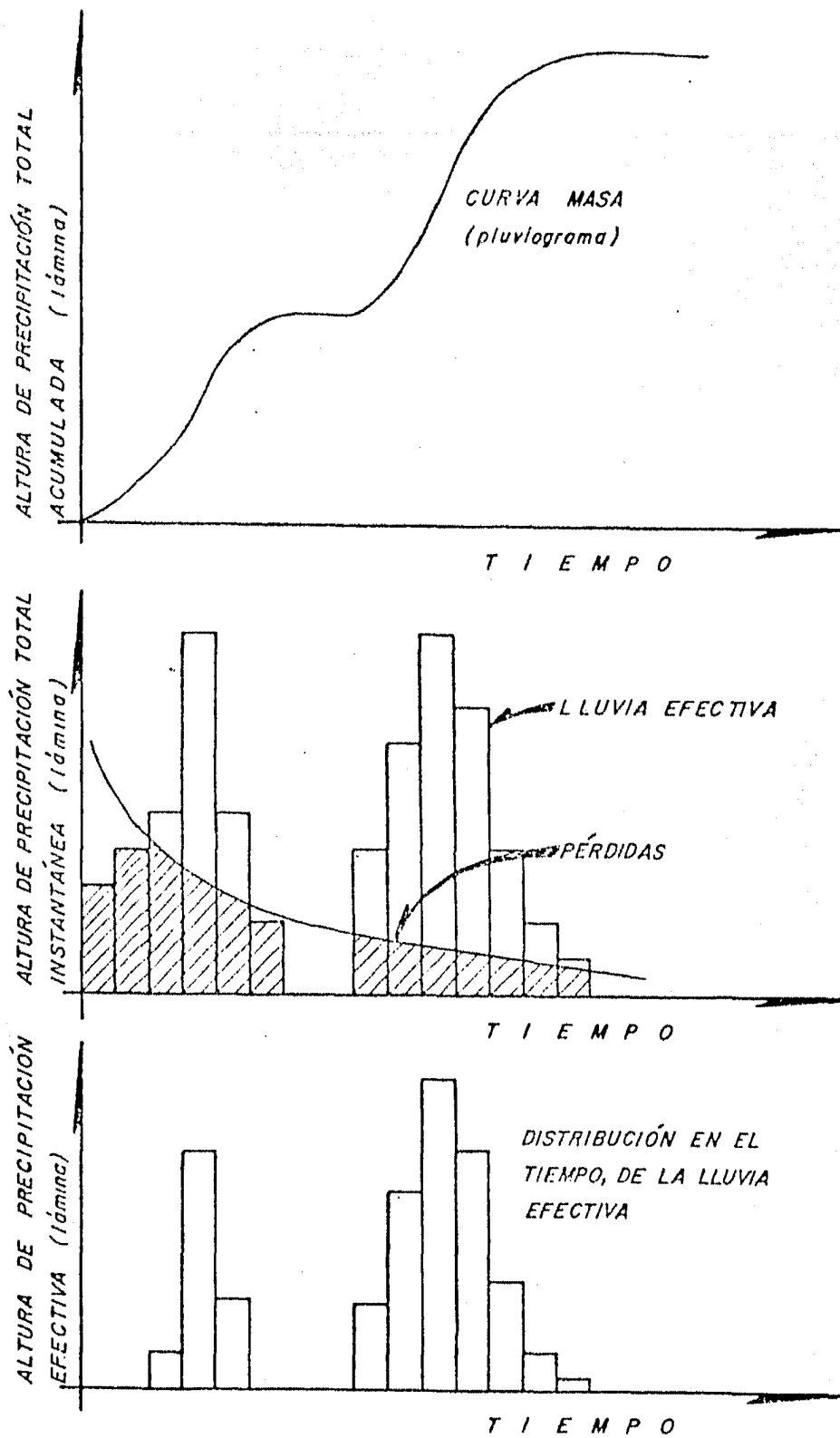


FIGURA 2-3 Distribución en el tiempo, de la lluvia efectiva

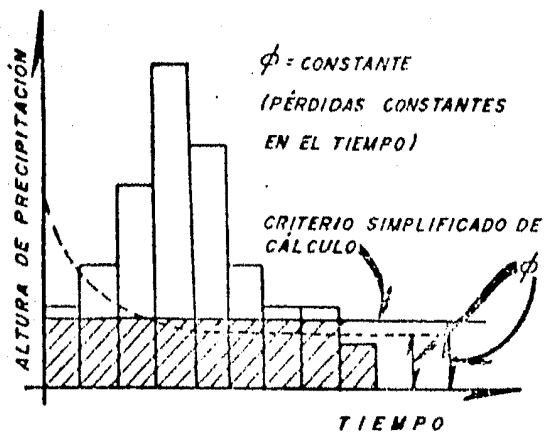


FIGURA 2-4 Coeficiente de Infiltración ϕ

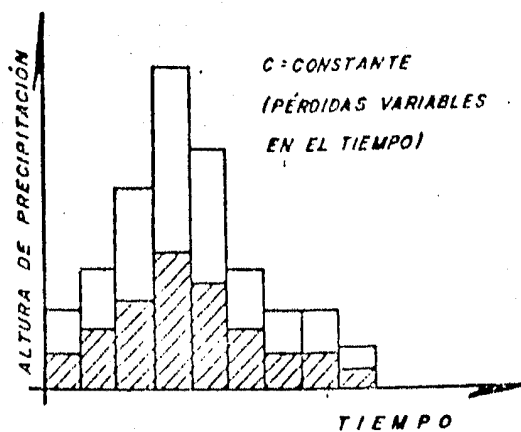


FIGURA 2-5 Coeficiente de escurrimiento C

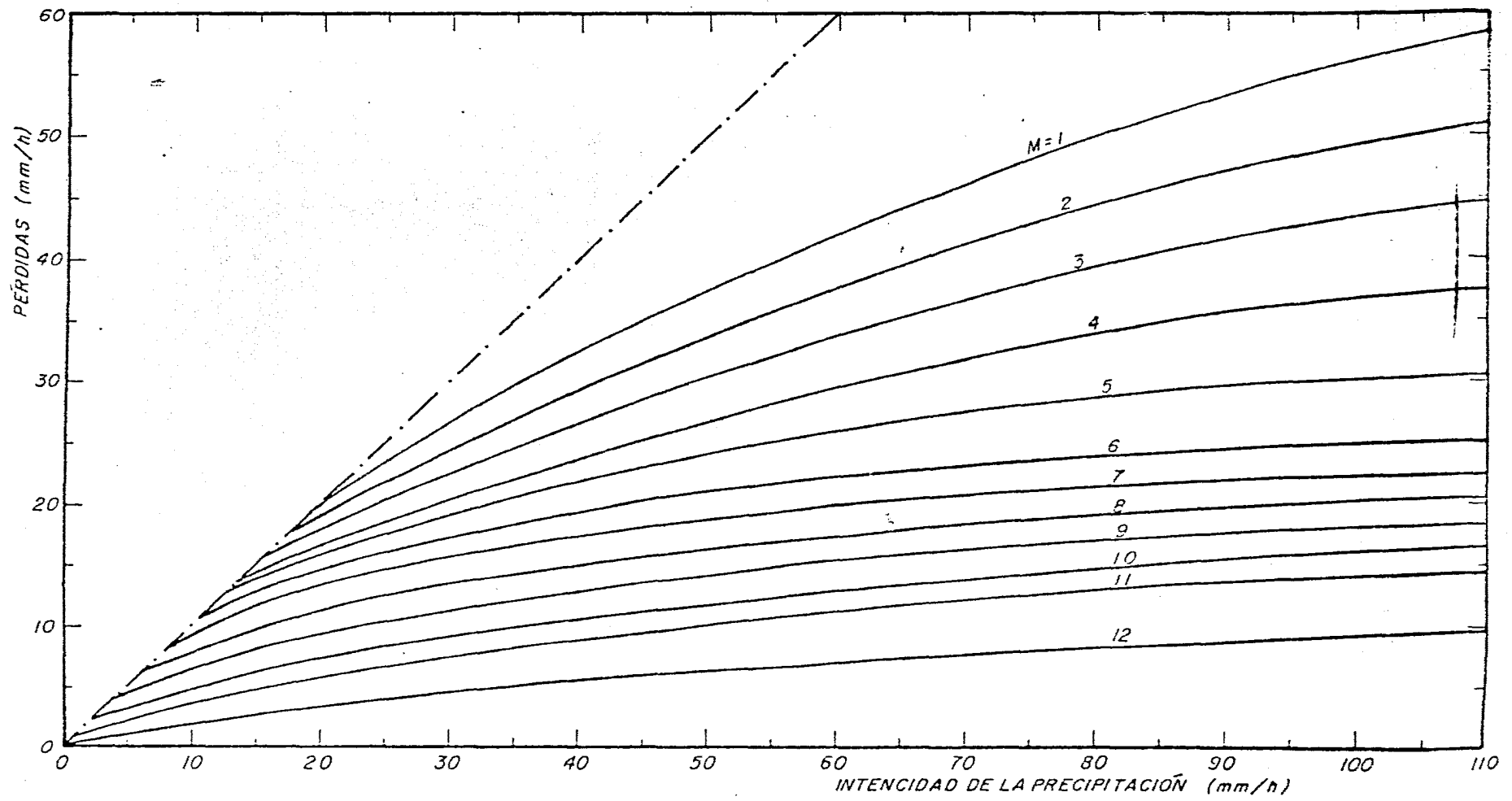


Figura 2-6 Método de Hicks para determinar las pérdidas de lluvia

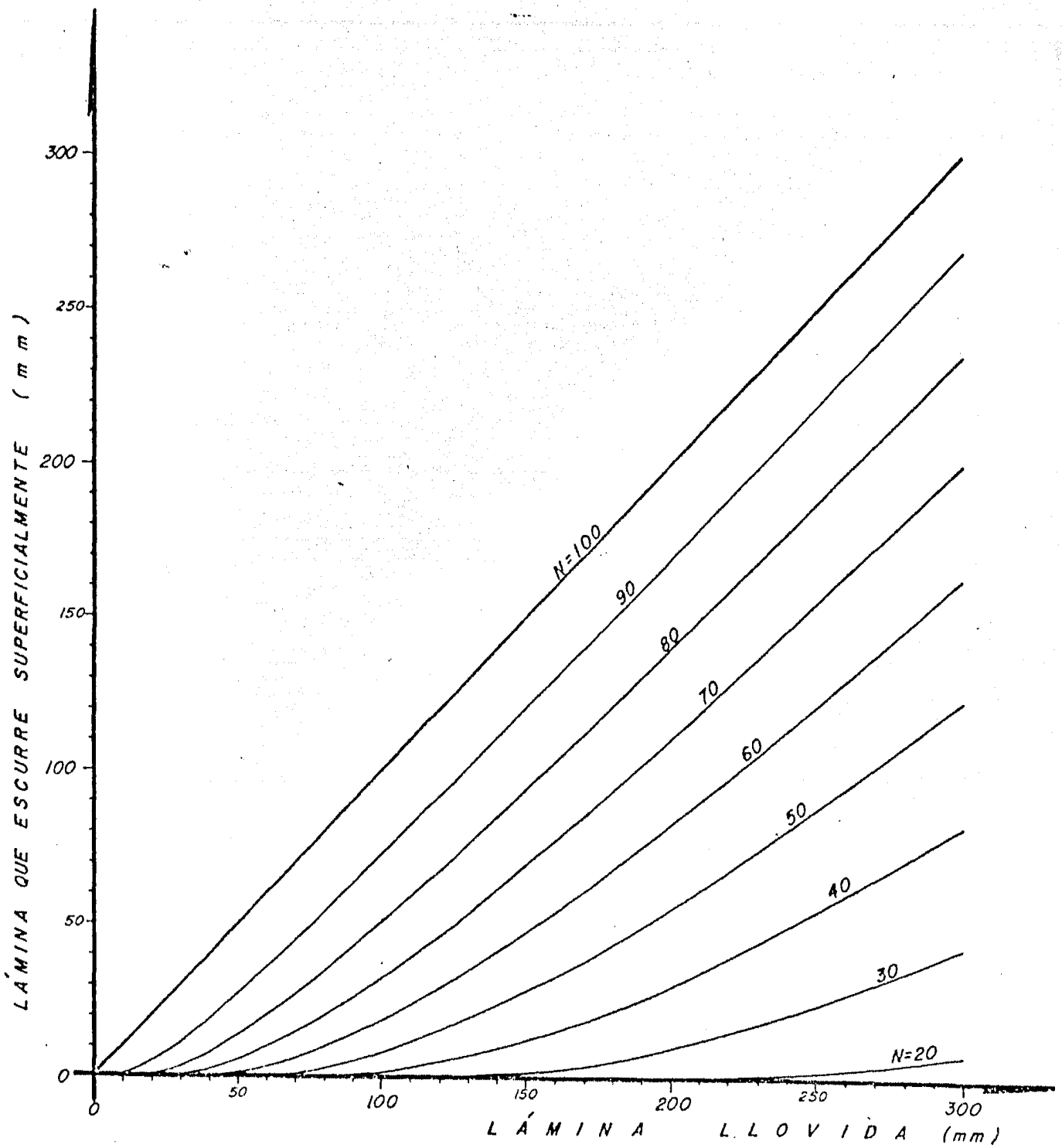


FIGURA 2-7 Cálculo de la lámina de escurrimiento directo, método del U.S. Soil Conservation Service

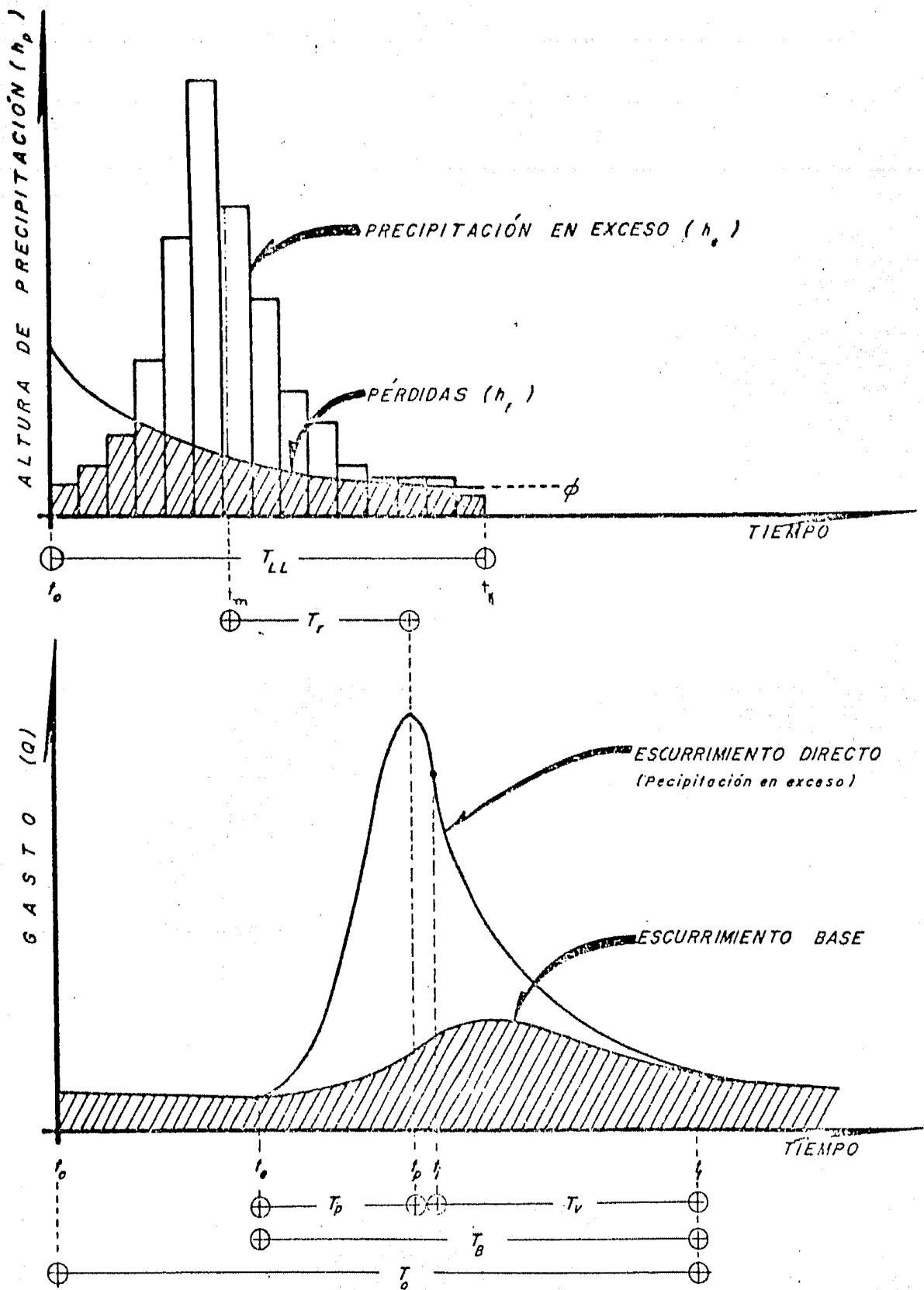


FIGURA 2-8 Tiempos representativos del fenómeno

3. METODOS PARA ESTIMAR EL ESCURRIMIENTO SUPERFICIAL

En la actualidad existen una gran variedad de técnicas para estimar el gasto producido por una precipitación determinada sobre un área dada. Para fines de este trabajo, los métodos se han clasificado en tres categorías:

- a) Métodos directos: Se han considerado métodos directos, a los deducidos suponiendo que el flujo en la cuenca, durante una tormenta, se establece.

- b) Métodos hidrologicos: Aquellos que emplean la ecuación de continuidad y una relación que describe el almacenamiento temporal en el sistema de drenaje.
- c) Métodos hidráulicos: Los que se han basado en la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y cantidad de movimiento para flujo no permanente.

El uso en particular de cada uno de estos criterios, está supeditado, por un lado, a la precisión que se desee en los resultados, y por otro, a la información disponible. En general, la información requerida y la precisión obtenida al aplicar los criterios, son crecientes en el orden en que fueron mencionados.

3.1 Métodos Directos

3.1.1 Método Racional

Uno de los métodos más antiguos (1889), y probablemente uno de los más utilizados hasta hace algunos años, es el conocido como Método Racional.

Se basa en considerar, en toda el área estudiada, una lluvia uniforme, de intensidad constante, y durante un tiempo tal que el flujo en la cuenca llegue a establecerse para que pueda escurrir un gasto constante en la descarga.

El método consiste en aplicar la fórmula

$$Q = C i A \quad (3-I)$$

donde A es el área drenada, expresada en m^2 ; C es un coeficiente que relaciona la lluvia total con el volumen escurrido (cap. 2.3.2.4); i es la intensidad de la lluvia, en m/s ; y Q es el gasto máximo en la descarga, expresado en m^3/s .

El valor de la intensidad de lluvia (i), por definición del método, es el asociado a una duración tal que toda la cuenca esté contribuyendo simultáneamente. Esto último ocurre cuando en la tormenta, la partícula de agua proveniente del punto más alejado de la región analizada, escurre por el punto de descarga, lo que ha sido definido como el mayor tiempo de concentración en la cuenca; por lo tanto:

$$T_{LL} = T_{C(\max)} \Rightarrow i = i_{(T_c)} \quad (3-II)$$

Es pertinente hacer notar que como la intensidad de lluvia es una función inversa de su duración, y como consecuencia en este caso, del tiempo de concentración, en ocasiones puede presentarse el gasto máximo en áreas menores que la total, por lo que conviene analizar las diferentes alternativas de escurrimiento, dividiendo el área total en varias pequeñas, estudiadas cada una por separado.

La fórmula más comúnmente empleada para estimar los tiempos de concentración en cuencas pequeñas es:

$$T_c = \left(\frac{0.87 L^3}{H} \right)^{0.385} \quad (3-III)$$

ó

$$T_c = 0.0663 \left(\frac{L}{\sqrt{S}} \right)^{0.77} \quad (3-IV)$$

donde

H : Desnivel entre el punto más alejado de la cuenca y la sección de salida (m),

L : Longitud del cauce que seguiría una partícula de agua que cayera en el punto más alejado dentro de la cuenca (Km),

S : Pendiente media del cauce mencionado,

T_c : Tiempo de concentración (h).

El coeficiente de escurrimiento puede ser escogido haciendo mediciones en la cuenca o relacionando las características de la cuenca con las de la tabla 3-A, pero teniendo en cuenta que los valores de esa tabla se obtuvieron para tormentas de 5 a 10 años de período de retorno (Ref. 4); tormentas con intensidades menos frecuentes requerirán el uso de coeficientes mayores, porque

TABLA 3-A

TIPO DEL AREA DRENADA

COEFICIENTE DE
ESCURRIMIENTO
MINIMO MAXIMO

ZONAS COMERCIALES:

ZONA COMERCIAL
VECINDARIOS

0.70 - 0.95
0.50 - 0.70

ZONAS RESIDENCIALES:

UNIFAMILIARES
MULTIFAMILIARES, ESPACIADOS
MULTIFAMILIARES, COMPACTOS
SEMIURBANAS
CASAS HABITACION

0.30 - 0.50
0.40 - 0.60
0.60 - 0.75
0.25 - 0.40
0.50 - 0.70

ZONAS INDUSTRIALES:

ESPACIADO
COMPACTO

0.50 - 0.80
0.60 - 0.90

CEMENTERIOS, PARQUES

0.10 - 0.25

CAMPOS DE JUEGO

0.20 - 0.35
0.20 - 0.

PATIOS DE FERROCARRIL

0.20 - 0.40

ZONAS SUBURBANAS

0.10 - 0.30

CALLES:

ASFALTADAS
DE CONCRETO HIDRAULICO
ADOQUINADAS

0.70 - 0.95
0.80 - 0.95
0.70 - 0.85

ESTACIONAMIENTOS

0.75 - 0.85

TECHADOS

0.75 - 0.95

PRADERAS

SUELOS ARENOSOS PLANOS (PENDIENTES < 0.02); 0.05 - 0.10
SUELOS ARENOSOS CON PENDIENTES MEDIAS (0.02 - 0.07); 0.10 - 0.15
SUELOS ARENOSOS ESCARPADOS (0.07 O MAS) 0.15 - 0.20
SUELOS ARCILLOSOS PLANOS (0.02 O MENOS) 0.13 - 0.17
SUELOS ARCILLOSOS CON PENDIENTES MEDIAS (0.02 - 0.07); 0.18 - 0.22
SUELOS ARCILLOSOS ESCARPADOS (0.07 O MAS) 0.25 - 0.35

la infiltración y otras pérdidas tienen proporcionalmente menos influencia en el escurrimiento.

3.1.2 Método Gráfico Alemán

La metodología que en general se sigue para aplicar este Método en una cuenca, formada por varias subcuencas (figura 3-1), se puede reducir a lo siguiente:

Mediante una relación para estimar los escurrimientos en cuencas pequeñas, usualmente la fórmula racional, se obtiene el gasto Q_i asociado al área de cada subcuenca y a una intensidad correspondiente a toda la zona analizada. Este gasto se mantiene hasta un tiempo igual al tiempo de concentración (T_c) de toda la región considerada, ya que se supone que $T_{ll} = T_c$.

La forma como se incrementa el gasto hasta llegar al máximo en las subcuencas depende del tiempo de concentración de cada subcuenca (T_{ci}). Se considera que el gasto crece linealmente desde un tiempo t hasta uno $t + T_c$, donde t es un tiempo que es función de los tiempos de concentración (T_{ci}) en las subcuencas aguas abajo de la sección considerada. El descenso del hidrograma se toma igualmente a partir del tiempo $t + T_{ll}$ hasta el instante $t + T_{ci} + T_{ll}$ (fig. 3-2).

Con el objeto de tener en cuenta la distribución del drenaje, al ob-

tener el gasto para toda la zona considerada se procede como sigue:

- a) El análisis se inicia a partir de la primera subcuenca que aporte gasto, prosiguiendo con el análisis hacia aguas arriba.
- b) Si los colectores son concurrentes, se supone que empiezan a contribuir con el gasto simultáneamente. Para simular esto gráficamente, se suman los hidrogramas de colectores concurrentes, comenzando todos al mismo tiempo (fig. 3-3).
- c) Si los colectores son consecutivos, se considera que la subcuenca de aguas arriba comienza a aportar gasto cuando la de aguas abajo haya llegado a su tiempo de concentración. Con objeto de conseguir este efecto, el hidrograma se sumará, pero a partir del tiempo de concentración de la cuenca próxima aguas abajo (fig. 3-4).

Al sumar todos los hidrogramas de la cuenca se obtiene el gasto máximo en el punto considerado (fig. 3-5).

3.2 Métodos Hidrológicos

3.2.1 Hidrograma Unitario

El método, en su forma tradicional (Ref. 15), tiene serias limitaciones; no obstante ha permitido desarrollar técnicas más aproxi-

madas. Proporciona la evolución de los escurrimientos en el tiempo, pero requiere de mediciones simultáneas, y en cada instante durante la tormenta, de las lluvias y escurrimientos en la cuenca.

El principio lo dió a conocer K.L. Sherman en el año de 1932. El propuso que como las características fisiográficas de una cuenca permanecen prácticamente constantes, los hidrogramas producto de lluvias semejantes deberían ser similares entre ellos.

Un enfoque más moderno del fenómeno, consiste en aceptar que la cuenca es un dispositivo físico, el cual ante una excitación dada (lluvias), produce una respuesta (escurrimientos), siendo factible, con técnicas estadísticas e hidrológicas, estudiar la función de transferencia entre excitaciones y resultados (Ref. 1).

3.2.1.1 Hipótesis básicas

El hidrograma unitario tradicional se define como el hidrógrafo del escurrimiento directo resultante de una lluvia en exceso unitaria (1 mm generalmente), precipitada uniformemente, en espacio y tiempo, sobre la superficie de la cuenca. El tiempo que dura la precipitación en exceso se llama duración efectiva o duración en exceso.

Con base en esta definición, se han deducido algunas de las hipótesis, implícitas en la misma definición, (Ref.12):

- ~~a)~~ La lluvia en exceso está distribuida uniformemente en toda su duración y sobre el área de la cuenca.
- b) El tiempo base del hidrograma unitario es constante para cada duración efectiva.
- c) Las ordenadas de un hidrograma son proporcionales al volumen de escurrimiento directo; la cuenca responde en forma lineal.
- d) Para una cuenca dada, en la forma de su hidrograma unitario se integran todas las características físicas de la misma.

3.2.1.2 Cálculo del hidrograma unitario

Si las ordenadas de una curva acotada en un sistema coordenado se dividen todas entre una constante arbitraria, el área bajo la curva queda reducida en la misma proporción que las ordenadas. De aquí que para calcular el hidrógrafo unitario de una cuenca, partiendo del hidrograma aforado, los gastos instantáneos de este último se dividen entre el volumen total escurrido expresado en lámina por unidad de área de la cuenca.

El hidrógrafo unitario así obtenido, es representativo de la duración efectiva de la tormenta que lo produjo.

Una secuela para el cálculo del hidrograma unitario es la siguiente:

- a) Al hidrograma aforado ~~se le~~ se separa el escurrimiento base; el resultado representa el hidrograma de escurrimiento directo.
- b) El volumen de escurrimiento directo, (área bajo el hidrograma de escurrimiento directo), se divide entre el área de la cuenca para expresarlo en altura por unidad de área, obteniéndose la lámina de lluvia en exceso h_e (mm).
- c) Las ordenadas instantáneas del hidrograma de escurrimiento directo (Q_i m³/s), se dividen entre la lámina de lluvia en exceso,

$$q_i = \frac{Q_i}{h_e} \quad (3-V)$$

Los gastos unitarios instantáneos (q_i) proporcionan los gastos en cada intervalo i del hidrograma unitario; sus unidades son, (m³/s/mm de lluvia efectiva).

- d) Se supone un índice de infiltración ϕ (mm), para cada intervalo de tiempo, constante durante todo el fenómeno.
- e) En el hidrograma de la tormenta total que produjo el hidrograma, se calculan las precipitaciones efectivas (h_{e_i}) en cada intervalo de tiempo Δt :

$$h_{e_i} = h_{p_i} - \phi \quad (3-VI)$$

donde h_{p_i} constituye la precipitación en el i -ésimo intervalo Δt .

Si en algún intervalo, h_{p_i} es menor que ϕ , h_{e_i} es cero durante ese lapso; esto es,

$$\text{si } h_{p_i} \leq \phi \Rightarrow h_{e_i} = 0 \quad (3-VII)$$

- f) Se debe cumplir que la suma de todas las alturas de lluvias efectivas instantáneas $(\sum_{i=1} h_{e_i})$ sea igual a la lámina total de lluvia efectiva (h_{e_t}). En caso contrario, repetir el cálculo desde el inciso d), suponiendo un nuevo valor de ϕ .
- g) Obtenida la distribución de lluvia efectiva en el tiempo, el lapso durante el cual hay lluvia efectiva es la duración efectiva o duración en exceso de la tormenta, D_e , y por lo tanto, del hidrograma unitario con ella deducido (fig. 3-6).

3.2.1.3 Predicción de escurrimientos y curva S

El caso más sencillo es predecir, a partir del hidrógrafo unitario de la cuenca, el hidrograma resultante de una tormenta con duración efectiva igual a la del hidrógrafo unitario, D_e , y la altura de precipitación efectiva, cualquiera.

El hidrograma se calcula multiplicando los gastos unitarios q_i , por la altura de precipitación efectiva de la tormenta que se estudia.

Esto es posible, ya que se supuso lineal la respuesta de la cuenca (hipótesis C).

Siguiendo este procedimiento, para calcular el escurrimiento de cualquier tormenta, serían necesarios una cantidad infinita de hidrogramas unitarios por cuenca; uno para cada duración en exceso diferente.

Sin embargo, aprovechando la linealidad de la cuenca y el principio de superposición de causas y efectos, implícito en la hipótesis d, si la tormenta por analizar tiene una duración en exceso múltiplo de la representativa de un hidrograma unitario de la cuenca, se hacen las siguientes consideraciones:

- a) Sea la duración en exceso de la tormenta por analizar $n D_e$, donde n es un número entero positivo, y D_e la duración correspondiente al hidrograma unitario.
- b) Suponer que se trata de n tormentas sucesivas, con duración en exceso D_e y altura de precipitación $h_e^{(D_e)}$.
- c) Obtener el hidrograma resultante de la primer tormenta supuesta con duración efectiva D_e ; esto es,

$$Q_i^{(1)} = q_i^{(D_e)} h_e^{(D_e)} \quad (3-VIII)$$

donde los $Q_i^{(1)}$ son los gastos para la primer tormenta, $q_i^{(D_e)}$ son

los gastos unitarios, y $h_e^{(D_e)}$ es la precipitación acaecida durante el primer intervalo D_e . (fig. 3-7)

- d) Obtener el hidrograma para la segunda tormenta supuesta:

$$Q_1^{(2)} = q_1^{(D_e)} \cdot h_e^{(D_e)} \quad (3-IX)$$

y suponer que se inicia el escurrimiento D_e horas más tarde que la anterior (fig. 3-8)

- e) Continuar con el mismo procedimiento para las siguientes tormentas, defasando el inicio de una con respecto al de la anterior D_e horas (fig. 3-9)

- f) La suma de los n hidrogramas es el hidrograma que se presentaría si ocurriese la lluvia con duración nD_e , y altura de precipitación efectiva $nh_e^{(D_e)}$ (fig. 3-10)

Utilizando el mismo razonamiento anterior, si se presenta una lluvia de duración infinita, en la cual se precipita la unidad de lluvia cada intervalo D_e , el hidrograma producido, fig. 3-11, se denomina curva S. Este último se puede obtener haciendo la suma del hidrograma unitario defasado D horas una cantidad suficiente de veces, hasta que el gasto se torne constante.

A partir de la curva S, calculada con base en un hidrograma unitario de duración efectiva D_e , es posible estimar el escurrimiento de

cualquier tormenta y para cualquier duración en la siguiente forma:

Si a la curva S se le resta la misma pero defasada t horas, se tiene un hidrograma con volumen de escurrimiento directo

$$\text{Vol} = \left[\frac{I (\text{mm})}{D_e (\text{hs})} \right] [t (\text{hs})] \quad (3-X)$$

el cual para ser unitario se necesita multiplicar por $\frac{D_e (\text{hs})}{t (\text{hs})}$, siendo la duración efectiva de este hidrograma unitario t horas (fig. 3-12).

3.2.2 Método del Road Research Laboratory

Para su aplicación, el método requiere de la precipitación por analizar y un mapa topográfico de la zona, donde se indique también la red de drenaje.

Dependiendo de la precisión deseada, el modelo acepta la precipitación total media en la zona, el hietograma medio, o, en un caso extremo, la curva masa relacionada con las isoyetas de la tormenta.

En este trabajo se presenta una versión semi-simplificada del modelo, que considera el hietograma medio en la cuenca (fig. 3-13).

El método considera que únicamente contribuyen al escurrimiento las áreas impermeables directamente conectadas a la red de desagüe, desechando todas aquellas áreas permeables o impermeables que drenan hacia zonas permeables.

Para tomar en cuenta el efecto de almacenamiento en la cuenca, requiere una relación entre los gastos en la descarga y los almacenamientos correspondientes en la cuenca (fig. 3-14).

Esta relación puede ser obtenida, en el caso de contar con mediciones de lluvias y escurrimientos en la región, a partir de las curvas de receso en los hidrogramas. Si no se dispone de dichas mediciones, los volúmenes almacenados se pueden obtener suponiendo que los tirantes en la cuenca y el sistema de drenaje, son proporcionales a los tirantes en la descarga.

Para incluir el efecto de que no toda el área contribuye al escurrimiento desde el inicio de la tormenta, se estiman para diferentes puntos los tiempos de traslado en cada tramo (con las pendientes y longitudes de los elementos del sistema y áreas impermeables directamente conectadas a la red). Uniendo todos los puntos con igual tiempo de traslado hasta la salida, se forma un plano de isócronas. Calculando las áreas entre cada isócrona y el punto de salida, y dibujando en un eje coordenado los tiempos contra el área que contribuye después de transcurrido ese tiempo, se contará con una relación tiempo/área para la cuenca (fig. 3-14).

Una manera de estimar los tiempos de traslado la proporciona Hicks, W.I. (Ref. 8), mediante la relación:

TABLA 3-B

TIPO DE SUPERFICIE	K	a	b	c
PAVIMENTO ASFALTICO LISO	15.13	0.323	0.448	0.640
PAVIMENTO ASFALTICO RUGOSO	31.74	0.373	0.366	0.684
PASTOS RECORTADOS	168.60	0.298	0.307	0.785

cercana a la salida (A_1), y aporta un volumen $A_1 hp_1$

$$q_1 = A_1 \cdot h_{p_1}$$

- b) Para el segundo intervalo, contribuyen el área A_2 , con la precipitación ocurrida en el primer intervalo (hp_1), más el área A_1 , con la precipitación del segundo (hp_2).

$$q_2 = A_2 hp_1 + A_1 hp_2$$

- c) En el intervalo j , el hidrograma virtual de entrada tendrá un valor q_j que vale.

$$q_j = A_1 hp_j + A_2 hp_{j-1} + \dots + A_{j-1} hp_2 + A_j hp_1$$

Una vez calculado este hidrograma "virtual" de entrada, éste se transita en la siguiente forma:

Considerando el principio de continuidad,

$$I = O - S$$

donde el volumen ingresado en un intervalo Δt es (fig. 3-15)

$$I = (q_{i-1} + q_i) \frac{\Delta t}{2}$$

el volumen que abandona la cuenca fig. 3-15 .

$$O = (Q_{i-1} + Q_i) \frac{\Delta t}{2}$$

y el volumen almacenado:

$$S = S_{(Q_i)} - S_{(Q_{i-1})}$$

substituyendo estos valores, y ordenándolos de manera conveniente,

$$(q_{i-1} + q_i - Q_{i-1}) \frac{\Delta t}{2} + S_{(Q_{i-1})} = Q_i \frac{\Delta t}{2} + S_{(Q_i)}$$

Si a partir de la gráfica gastos-almacenamientos se dibuja otra gráfica que relacione a Q y S contra $(Q \cdot \frac{\Delta t}{2} + S(Q))$ (fig. 3-16), entrando en esta última con el valor de $(q_{i-1} + q_i - Q_{i-1}) \frac{\Delta t}{2} + S_{(Q_{i-1})}$, se obtienen directamente los valores de Q_i y S_i .

Procediendo de igual forma para todos los puntos del hidrograma "virtual" de entrada, se podrá calcular el hidrograma de descarga.

3.2.3 Método del Hidrograma de Chicago

El método está basado en una sucesión de tránsitos hidrológicos, el primero de los cuales se realiza a partir del hidrograma de la tormenta a través de las superficies de la cuenca donde cae la lluvia. Los tránsitos se suceden hacia aguas abajo, según indique la dirección de un patrón de flujo trazado en la cuenca, hasta alcanzar el punto de salida en la cuenca.

3.2.3.1 Información antecedente

Para poder utilizar el modelo se requiere de un plano topográfico

de la región. En este plano se delimitan aquellas zonas de la cuenca cuyas características de permeabilidad sean semejantes. En el mismo plano, se detalla el sistema de drenaje, tanto superficial como subterráneo, localizando todas las alcantarillas de entrada al drenaje subterráneo y las descargas de construcciones directamente conectadas al sistema.

Se definen las trayectorias del flujo, desde que el agua se precipita, hasta que es evacuada de la zona. Se pueden hacer las siguientes simplificaciones:

- a) Los techados de construcciones y áreas impermeables con drenaje hacia el arroyo de las calles son considerados como parte del área drenada por las calles.
- b) Las áreas cuyo escurrimiento se lleva a cabo hacia zonas permeables se suponen con las características de permeabilidad de las regiones receptoras.
- c) Otras zonas aisladas con diferente permeabilidad entre sí, se agrupan formando así áreas de mayor tamaño y en menor número.

Es necesario además contar con la curva de capacidad de infiltración de las distintas áreas en que se dividió la cuenca.

3.2.3.2 Deducciones a la precipitación

Las pérdidas o deducciones a la lluvia total que considera el modelo, son la infiltración y los almacenamientos en depresiones del terreno, ambas como función del tiempo.

Los autores del modelo, referencia 17 , proponen que se utilice, para calcular la infiltración, la fórmula de Horton, referencia 10 , cuya forma es,

$$f = f_c + (f_0 - f_c) e^{-kt_f} \quad (3-XI)$$

- donde
- t_f es el tiempo medido desde que se inicia la curva.
 - f es la capacidad de infiltración en el tiempo t_f , expresada en lámina de agua por unidad de tiempo ($L T^{-1}$).
 - f_c es la infiltración que se obtendría si la duración de la lluvia fuera infinita.
 - f_0 es la infiltración cuando t es igual a cero. f_c y f_0 tienen las mismas unidades de f , ($L T^{-1}$).
 - k es una constante positiva.
 - e es la base de los logaritmos naturales, 2.718...

La capacidad de infiltración al principio de la tormenta en general es mayor que la intensidad de la lluvia, existiendo un intervalo durante el cual todo lo que llueve se infiltra. Este intervalo termina

en el momento en que la intensidad de la lluvia es mayor que la capacidad de infiltración.

La simulación del fenómeno se realiza de la siguiente forma: Integrando en el tiempo la expresión (3-XI), se obtiene la función para estimar la curva masa de infiltración F,

$$F = \int_0^t f \cdot dt = \int_0^t (f_c + (f_0 - f_c) e^{-kt}) dt = f_c \cdot t - \frac{1}{k} (f_0 - f_c) e^{-kt} \quad (3-XII)$$

Dibujando los valores de la función F contra el tiempo se obtiene la curva masa de infiltración; línea delgada discontinua de la figura (3-17). Trazando en la misma gráfica la curva masa de la precipitación P (línea continua de la figura 3-17), y desplazando en el tiempo la curva F hasta que las curvas P y F sean tangentes (punto t_t), se obtiene la curva masa real de infiltración (línea gruesa discontinua de la figura 3-17). Para efectos del análisis de la tormenta, se considera que la curva F comienza desplazada un intervalo t_R respecto del inicio de la tormenta, o sea, $t_f = 0$ cuando $t_0 = t_R$, lo cual conduce a que $t_f = t_0 - t_R$, y a que la infiltración sea igual a la precipitación, hasta que $t_0 = t_t$, no existiendo por lo tanto agua disponible para escurrimiento superficial o almacenaje en depresiones, sino hasta que $t_0 > t_t$; y el agua disponible es la diferencia entre P y F, expresada en lámina de agua, ó i-f expresada en gasto por unidad de área.

Para calcular el almacenamiento en las depresiones, los autores del modelo proponen que el volumen de ellas se estime suponiendo que las profundidades de las cavidades sobre el terreno están distribuidas aleatoriamente, según una distribución de probabilidad normal con media $h_d/2$ y desviación estándar 1, donde h_d es la altura de la depresión más profunda, con lo cual, en un instante cualquiera, la relación entre el gasto por unidad de área que escurre (σ), y el agua disponible para almacenarse o escurrir ($i-f$), es igual al área bajo la curva de probabilidad entre $Z = -\infty$, y $Z = (P-F) - h_d/2$, o sea,

$$\sigma = (i-f) \left(\frac{\sigma}{i-f} \right) \quad (3-XIII)$$

donde σ es el gasto que logra escurrir directamente, expresado en lámina por unidad de área, y la relación $\left(\frac{\sigma}{i-f} \right)$ es :

$$\int_{-\infty}^{(P-F) - \frac{h_d}{2}} \frac{\sigma}{i-f} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \quad (3-XIV)$$

La mecanización numérica de lo expuesto hasta aquí, puede resumirse en la tabla 3-C, la cual en un instante $t_0 = t_j$, mayor que T_R tiene los siguientes valores:

Col. 1 (t_0) : Tiempo transcurrido desde que se inició la tormenta; $t_0 = t_j$

Para calcular el almacenamiento en las depresiones, los autores del modelo proponen que el volumen de ellas se estime suponiendo que las profundidades de las cavidades sobre el terreno están distribuidas aleatoriamente, según una distribución de probabilidad normal con media $h_d/2$ y desviación estándar 1, donde h_d es la altura de la depresión más profunda, con lo cual, en un instante cualquiera, la relación entre el gasto por unidad de área que escurre (σ), y el agua disponible para almacenarse o escurrir ($i-f$), es igual al área bajo la curva de probabilidad entre $Z = -\infty$, y $Z = (P-F) - h_d/2$, o sea,

$$\sigma = (i-f) \left(\frac{\sigma}{i-f} \right) \quad (3-XIII)$$

donde σ es el gasto que logra escurrir directamente, expresado en lámina por unidad de área, y la relación $\left(\frac{\sigma}{i-f} \right)$ es :

$$\int_{-\infty}^{(P-F) - \frac{h_d}{2}} \frac{\sigma}{i-f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{(P-F) - \frac{h_d}{2}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \quad (3-XIV)$$

La mecanización numérica de lo expuesto hasta aquí, puede resumirse en la tabla 3-C, la cual en un instante $t_0 = t_j$, mayor que T_R tiene los siguientes valores:

Col. 1 (t_0) : Tiempo transcurrido desde que se inició la tormenta; $t_0 = t_j$

- Col. 2 (i) : Intensidad de la tormenta durante el intervalo t_j ;

$$i \int_{t=t_j} = i_j$$
- Col. 3 (t_f) : Tiempo de infiltración; $t_f = t_j - t_R$
- Col. 4 (f) : Capacidad de infiltración durante el intervalo t_f ;

$$f \int_{t_f=(t_j - t_R)} = f_j$$
- Col. 5 (i-f) : Gasto disponible para almacenamiento o escurrimiento superficial; $i_j - f_j$
- Col. 6 (P) : Lámina precipitada desde que se inició la tormenta hasta este instante; valor en la curva masa de precipitación en el tiempo t_j ; P_j
- Col. 7 (F) : Lámina infiltrada desde que se inicia la infiltración hasta el tiempo t_f ; F_j
- Col. 8 (P-F) : Lámina no infiltrada; col. 6 menos col. 7, $(P-F)_j$
- Col. 9 ($\frac{\sigma}{i-f}$) : Relación entre el escurrimiento directo y el escurrimiento más almacenaje superficial en depresiones cuando se cuenta con una lámina no infiltrada $(P-F)_j$; se calcula como el área bajo la curva de Gauss en el intervalo $Z = -\infty$ y $Z = (P-F)_j - h_d/2$
- Col. 10 (σ) : Gasto de escurrimiento directo, expresado en lámina por unidad de área; valor en la columna 5, $i_j - f_j$, por el valor en la columna 9, $(\frac{\sigma}{i-f})_j$

Es pertinente hacer notar que cuando el valor en la columna 8 es igual o mayor que h_d , la relación $(\frac{\sigma}{i-f})$ es igual a uno, ya que se han satisfecho totalmente las depresiones sobre el terreno.

3.2.3.3 Flujo a través de las superficies elementales

La lluvia que cae sobre cada una de las áreas en que se ha dividido la cuenca, es transitada a través del área mediante una función de almacenamiento, y el principio de continuidad de masa. El principio del tránsito es el siguiente: El cambio en el almacenamiento superficial instantáneo, ΔD , ocurrido durante el intervalo t_j y t_{j+1} , es igual a la diferencia entre el volumen que ingresa a la superficie $(\sigma_j + \sigma_{j+1}) \frac{\Delta t}{2}$, y el volumen que egresa del área, $(q_j + q_{j+1}) \frac{\Delta t}{2}$.

Donde σ y q son los gastos de entrada y salida respectivamente, expresados en lámina de agua por unidad de tiempo y por unidad de área, (mm/h), y $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ que en general se conserva como constante.

Expresando el principio formalmente, se tiene:

$$(\sigma_j + \sigma_{j+1}) \frac{\Delta t}{2} - (q_j + q_{j+1}) \frac{\Delta t}{2} = \Delta D_{j,j+1} = D_{j+1} - D_j \quad (3-XV)$$

En esta expresión, el término D es el almacenamiento superficial, el cual fue estudiado por Izzard (Ref. 11), quien desarrolló la si-

guiente relación empírica:

$$D = 0.1729 \frac{0.0007l + C}{S_0^{1/3}} l^{1/3} q^{1/3} \quad (3-XVI)$$

donde el almacenamiento D está expresado en lámina de agua, mm, y es originado por la lluvia de intensidad i (mm/h), sobre una superficie de longitud l (m) y pendiente S_0 , cuando en el extremo inferior del área se está descargando un gasto por unidad de área q (mm/h). C es un coeficiente que toma en cuenta la rugosidad del terreno, y tiene los valores de la tabla 3-D, también determinados por Izzard, ref. 11 ,

TABLA 3-D

Tipo de superficie	Coeficiente C
Pavimento asfáltico muy liso	0.1778
Techados de asfalto con arena	0.1905
Techados de material triturado	0.2083
Pavimento de concreto	0.3040
Pavimento de asfalto con grava	0.4318
Césped bien podado	1.1684
Césped tupido de pasto seco	1.5240

Ordenando adecuadamente los términos de la ecuación (3-XV) se obtiene,

$$\frac{\sigma_j + \sigma_{j+1}}{2} - q_j + \left(\frac{q_j}{2} + \frac{D_j}{\Delta t} \right) = \frac{q_{j+1}}{2} + \frac{D_{j+1}}{\Delta t} \quad (3-XVII)$$

Expresión en la que para el instante inicial, $j=0$, se conocen los

términos del miembro izquierdo, ya que se conocen las condiciones iniciales del escurrimiento. Resolviendo simultáneamente con la ecuación (3-XVI) se puede conocer q_{j+1} y D_{j+1} . Estos últimos, q_{j+1} y D_{j+1} , pasan a ser, en el siguiente intervalo, q_j y D_j respectivamente, por lo tanto, la ecuación está resuelta para cualquier tiempo.

Para facilitar los cálculos, se puede designar a

$$\left(\frac{q}{2} + \frac{D}{\Delta t} \right) = F(q, i, \Delta t) \quad (3-XVIII)$$

Dibujando en una gráfica doble logarítmica los valores de $F(q, i, \Delta t)$ contra los de q , para diferentes intensidades i , y varios Δt , se obtienen gráficas como la mostrada en la figura 3-18, en la cual, entrando con el valor de $F(q, i, \Delta t)_{j+1}$, se puede obtener, para una intensidad i , y un incremento de tiempo Δt , el valor del gasto q_{j+1} . El término $F(q, i, \Delta t)_{j+1}$ está determinado, ya que es igual a

$$\frac{\sigma_j + \sigma_{j+1}}{2} - q + F(q, i, \Delta t)_j$$

Procediendo análogamente en cada intervalo, se puede ir calculando el hidrograma descargado por la superficie elemental analizada.

Para mecanizar el procedimiento, se forma una tabla como la tabla 3-E, lo cual también facilita los cálculos.

3.2.3.4 Tránsito en cunetas

El gasto abastecido a cada cuneta está integrado por la suma de los gastos descargados por las áreas elementales que drenan a cada cuneta, incluyendo permeables e impermeables. Como simplificación, se supone que el abastecimiento se realiza uniformemente distribuido a lo largo de toda la longitud del cauce o cuneta.

Sea Q_0 el gasto de entrada por unidad de longitud. Entonces, para un flujo establecido, en el extremo superior del cauce el gasto es cero, incrementándose linealmente con la distancia hasta que en el extremo inferior el gasto es el total instantáneo de entrada I_0 .

Si la sección de las cunetas es triangular, figura 3-19, el almacenamiento instantáneo en ellas, puede ser calculado integrando los tirantes del flujo a lo largo del cauce.

Para estimar los tirantes, se utiliza la fórmula de Manning en forma diferencial, suponiendo que el radio hidráulico es igual al tirante y que la pendiente hidráulica es igual a la del terreno:

$$dQ = v dA = \frac{z}{n} S_0^{\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{3}} dh \quad (3-XIX)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning, y las variables restantes se encuentran definidas en la figura 3-19.

Integrando la ecuación 3-XIX entre los límites

$h = 0$ y $h = y$, y despejando a y ,

$$y = \left(\frac{2.667 n Q}{S_0^{1/2} z} \right)^{3/8} \quad (3-XX)$$

El área A en cualquier sección transversal se puede expresar como

$$A = \frac{z y^2}{2} = \frac{z}{2} \left(\frac{2.667 n Q}{S_0^{1/2} z} \right)^{3/4} \quad (3-XXI)$$

Si se integra el área en toda la longitud de la cuneta, se obtiene el volumen en tránsito S_e :

$$S_e = \int_0^{L_g} A dx = \int_0^{L_g} \frac{z}{2} \left(\frac{2.667 n Q}{S_0^{1/2} z} \right)^{3/4} dx = \frac{z}{2} \left(\frac{2.667 n}{S_0^{1/2} z} \right)^{3/4} \int_0^{L_g^{3/4}} Q dx \quad (3-XXII)$$

El gasto en cualquier sección transversal puede expresarse en la forma,

$$Q = I_0 \frac{x}{L_g}$$

donde x es la longitud de la cuneta, medida desde su extremo superior hasta la sección considerada.

Substituyendo en la expresión (3-XXII) e integrando desde $x=0$ hasta $x=L_g$, el volumen en tránsito S_e es :

$$S_e = 0.5962 \frac{n^{3/4} z^{1/4} L_g}{S_0^{3/8}} I^{3/4} \quad (3-XXIII)$$

relación válida para flujo establecido.

En el caso de flujo variado, el almacenamiento es función del gasto, tanto de entrada como de salida. Con objeto de poder establecer una relación sencilla entre el almacenamiento y ambos gastos, se hacen las consideraciones siguientes: El gasto descargado por la cuneta en cada intervalo de tiempo, es Q_d ; el gasto que entra a la cuneta en toda su longitud, es I_0 , luego entonces, por continuidad, el incremento del volumen almacenado en la cuneta en cada incremento de tiempo Δt , es la diferencia entre el volumen que ingresa al cauce, $I_0 \Delta t$, y el volumen que abandona a la cuneta $Q_d \Delta t$. Si ΔS es el incremento del volumen almacenado, $\Delta S = I_0 \Delta t - Q_d \Delta t$, el cual en la parte más alta de la cuneta se aproxima a cero.

Estas últimas consideraciones establecen las condiciones de frontera para la función que define el gasto Q en cada sección del cauce:

$$Q \Big|_{x=L_g} = Q_d \quad ; \quad y \quad \left. \frac{dQ}{dx} \right|_{x=0} = \frac{I_0}{L_g}$$

donde L_g es la longitud total de la cuneta.

Una ecuación que satisface estas condiciones de frontera es:

$$Q = I_0 \frac{x}{L_g} \left\{ 1 - \frac{x}{L_g} \left[1 - \left(\frac{Q_d}{I_0} \right)^{3/4} \right] \right\}^{4/3} \quad (3-XXIV)$$

Esta relación proporciona el gasto en cualquier instante y sección en función de los gastos de entrada y salida en la cuneta. Si se

substituye en la ecuación (3-XXII) se podrá valorar el almacenamiento instantáneo S en la cuneta cuando el flujo es variado.

$$S = \frac{z}{2} \left(\frac{2.667n}{S_0^{1/2} z} \right)^{3/4} \int_0^{L_g} \frac{x^{3/4}}{I_0^{3/4} L_g^{3/4}} \left\{ 1 - \frac{x}{L_g} \left[1 - \left(\frac{Q_d}{I_0} \right)^{3/4} \right] \right\} dx$$

$$\therefore S = \frac{n^{3/4} z^{1/4} L_g}{9.225 S_0^{3/8}} (4 I_0^{3/4} + 7 Q_d^{3/4}) \quad (3-XXIX)$$

Aplicando el principio de continuidad de masa en la cuneta entre los tiempos t_j y t_{j+1}

$$(I_j + I_{j+1}) \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2} - (Q_j + Q_{j+1}) \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2} = S_{j+1} - S_j \quad (3-XXX)$$

donde los subíndices j y $j+1$ indican el intervalo de tiempo, el término I es el gasto en m^3/s que está entrando en la cuneta, Q es el gasto en m^3/s que egresa de la cuneta, y S es el almacenamiento en m^3 . Si el incremento de tiempo $(t_{j+1} - t_j)$ se mantiene constante Δt segundos, entonces:

$$(I_j + I_{j+1}) \frac{\Delta t}{2} - (Q_j + Q_{j+1}) \frac{\Delta t}{2} = S_{j+1} - S_j$$

disponiendo los términos en forma adecuada,

$$\left(\frac{I_j + I_{j+1}}{2} \right) - Q_j + \left(\frac{1}{2} Q_j + \frac{S_j}{\Delta t} \right) = \left(\frac{1}{2} Q_{j+1} + \frac{S_{j+1}}{\Delta t} \right) \quad (3-XXXI)$$

Para facilitar los cálculos, es conveniente designar $F_g(Q, I)$ al término $\frac{1}{2} Q + \frac{S}{\Delta t}$, y dibujar los valores de $F(Q, I)$ contra Q para diferentes I (fig. 3-20), con lo cual se tiene:

$$\frac{I_j + I_{j+1}}{2} - Q_j + F_g(Q, I)_j = F_g(Q, I)_{j+1} \quad (3-XXXII)$$

$\frac{I_j + I_{j+1}}{2}$ se obtiene del hidrograma de entrada a la cuneta; Q_j es el gasto calculado en la iteración anterior; $F_g(Q, I)_{j+1}$ se obtiene directamente de la ecuación (3-XXXII), y además viene siendo $F_g(Q, I)_j$ para la iteración siguiente. Se entra en la gráfica $F_g(Q, I)$ contra Q , con el valor de $F_g(Q, I)_{j+1}$, se relaciona con el valor de $(\frac{I_j + I_{j+1}}{2})$, y se obtiene, en el eje de las ordenadas, el valor de Q_{j+1} . En la siguiente iteración se tendrá:

$$\frac{I_{j+1} + I_{j+2}}{2} - Q_{j+1} + F_g(Q, I)_{j+1} = F_g(Q, I)_{j+2} \quad (3-XXXIII)$$

Procediendo en forma análoga a la iteración anterior, se obtiene $F_g(Q, I)_{j+2}$, y así sucesivamente hasta terminar con el tránsito. En la tabla (3- F) se propone una forma sencilla de llevar la secuencia del cálculo.

Una vez realizado todo el tránsito, los valores de Q en cada instante, son el hidrograma de entrada a la alcantarilla correspondiente al interceptor.

3.2.3.5 Tránsito en los interceptores

Para simular este tránsito, se supone que cada volumen que entra al sistema de drenaje subterráneo se retrasa un tiempo igual al de traslado entre el punto donde entra, y el punto donde descarga.

Una primera simplificación es suponer una velocidad media para cualquier gasto; con ella, calcular el tiempo entre cada alcantarilla y la descarga, desfasar el hidrograma en cada alcantarilla el tiempo de traslado correspondiente y sumar los hidrogramas defasados para obtener el hidrograma de descarga para cada interceptor (fig. 3-21), repitiendo este proceso con el gasto medio obtenido.

Si las alcantarillas o entradas al interceptor están distribuidas en forma aproximadamente uniforme a lo largo de él, se puede calcular un tiempo de traslado entre el punto más alto del interceptor y su descarga, t_r ; y sumar los hidrogramas en todas las alcantarillas que aportan al interceptor analizado. Es conveniente precisar que todos los hidrogramas van sumados sin defasamiento a partir del tiempo en el cual llega cada uno a su alcantarilla. Suponiendo que todas las alcantarillas aportan un gasto igual y simultáneamente, las ordenadas del hidrograma suma obtenido se dividen entre el número de alcantarillas (n); este último hidrograma es el representativo de cada alcantarilla. Si se hace lo mismo con los tiempos, el tiempo t_r/n es el ocupado por cada hidrograma en trasladarse de una alcan-

tarilla a otra, por lo tanto, si el hidrograma representativo de cada alcantarilla se defasa cada vez un tiempo t_r/n , la suma de los n hidrógrafos defasados es el hidrograma descargado por el interceptor. El procedimiento gráfico está representado en la figura 3-22.

3.2.3.6 Tránsito en el Colector

En este caso, la técnica de análisis es análoga a la del tránsito en los interceptores, excepto que las entradas al colector, son las salidas de los interceptores que descargan en él.

Análogamente, si la red tiene aún colectores de mayor orden, o sea colectores de colectores, se utiliza nuevamente la misma metodología usada para los interceptores.

3.3 Métodos Hidráulicos

Estos modelos consideran dos etapas: En la primera se calculan los escurrimientos de superficies elementales; en la segunda, los escurrimientos computados en la etapa anterior son transitados a lo largo de la red de drenaje.

Para calcular los escurrimientos superficiales se procede como sigue:

- a) Se traza detalladamente el sistema de drenaje pluvial (fig. 3-23a).
- b) A cada elemento de la red se le delimita su área de aportación o

área tributaria (fig. 3-23b).

- c) Con base en las superficies tributarias del paso anterior y un modelo lluvia-escorrimento para áreas pequeñas (por ejemplo, Método Racional, Método Gráfico Alemán, u otro similar; subcapítulos 3.1.1 y 3.1.2 de este trabajo y ref. 4 respectivamente), se calculan los hidrógrafos del escorrimento correspondientes a cada área.

Los hidrogramas calculados en cada área son utilizados como entradas al elemento de drenaje del cual son tributarias, para transitarlos a lo largo de su trayecto en el drenaje.

La simulación del tránsito se basa en la aplicación de los principios de conservación de la masa y de cantidad de movimiento del flujo.

Es evidente que la precisión del modelo depende, en principio, del detalle con que se analice la red, ya que entre más pequeñas son las áreas tributarias, los modelos lluvia-escorrimento describen el fenómeno de manera más aproximada a la realidad.

3.3.1 Deducción de las ecuaciones básicas

Sea un fluido en movimiento. Dentro del seno de éste, el volumen de control representado en la figura 3-24, en la cual \bar{n} ds representa una superficie de tamaño diferencial multiplicada por un vector unitario normal a la superficie de control (S.C.) que envuelve total-

mente al volumen de control (V.C.); \bar{v} es el vector velocidad del flujo en cada instante y posición y dV es un volumen elemental dentro del volumen de control, cuya densidad es ρ .

Para analizar el comportamiento a través del tiempo y espacio de una propiedad $\pi(x, y, z, t)$ de la masa del fluido, se parte del principio de conservación de la materia: El intercambio o flujo neto de la propiedad $\pi(x, y, z, t)$ a través de las fronteras del volumen de control ($\oint_{s.c.} \pi(x, y, z, t) (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds$), más la variación en el tiempo de la mencionada propiedad dentro del volumen de control $\iiint_{v.c.} \frac{\partial}{\partial t} \pi(x, y, z, t) dV$, es igual a la cantidad neta de la propiedad añadida o extraída externamente al volumen de control ($\iiint_{v.c.} D \pi(x, y, z, t)$).

Formalmente el principio se expresa como:

$$\oint_{s.c.} \pi(x, y, z, t) (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds + \iiint_{v.c.} \frac{\partial}{\partial t} \pi(x, y, z, t) dV = \iiint_{v.c.} D \pi(x, y, z, t) \quad (3-XXXIV)$$

3.3.1.1 Ecuación de continuidad de masa (Principio de conservación de la materia).

Si la función que representa la propiedad de la masa en la ecuación 3-XXXIV, $\pi(x, y, z, t)$, es la densidad de masa del fluido, ρ , la relación 3-XXXIV describe el principio de conservación de la materia:

$$\oint_{s.c.} \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds + \iiint_{v.c.} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dV = \iiint_{v.c.} D (\rho) \quad (3-XXXV)$$

El término $\oint_{s.c.} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$ representa el flujo neto de masa a través de la superficie de control en la unidad de tiempo; el segundo, $\iiint_{v.c.} \frac{\delta}{\delta t} (\rho d\tau)$, la variación en el tiempo de la masa contenida en el volumen de control; en el otro miembro de la ecuación, $\iiint_{v.c.} D(\rho)$ es una función que describe la transformación de la materia; pero dado que en el caso que se aborda no existen procesos químicos que la transformen, es igual a cero:

$$\oint_{s.c.} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \iiint_{v.c.} \frac{\delta}{\delta t} (\rho d\tau) = 0 \quad (3-XXXVI)$$

El flujo en una avenida, comparado con su extensión, ocurre con profundidades pequeñas, o sea, es el movimiento de una onda larga; esto permite despreciar las velocidades verticales del agua y considerar el movimiento unidimensional en los cauces.

Adoptando un criterio Lagrangiano de cálculo (volúmenes de control invariantes en el espacio del movimiento, que sólo modifican su volumen por el cambio en la profundidad del flujo), estimando las integrales con valores medios y suponiendo el agua como un fluido incompresible (masa específica constante), se justifica dividir la ecuación 3-XXXVI entre ρ , eliminándola como variable, considerar

$\vec{n} ds = dA$, elemento de área normal a la dirección del flujo, y $\vec{v} = u$, velocidad en el sentido axial del cauce; además, $\iiint_{v.c.} \frac{\delta}{\delta t} (d\tau) = \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{v.c.} d\tau$

Con base en las hipótesis anteriores y refiriendo 3-XXXVI al volumen de control en un cauce para drenaje, generalmente prismático (fig. 3-25), el flujo neto de masa a través de la superficie de control toma la forma:

$$\frac{1}{\rho} \oint_{S.C.} \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds = \iint_A u dA$$

que si se integra resulta:

$$\iint_A u dA = \left[\left(U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \left[\frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{u}{U} \right) dA \right]$$

donde U es la velocidad media en la sección y A es el área de la misma. Desarrollando los términos, simplificando, y dado que

$$\frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{u}{U} \right) dA = 1, \text{ se obtiene:}$$

$$\iint_A u dA = \left(A \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial A}{\partial x} \right) (\Delta x) \quad (3-XXXVII a)$$

o también,

$$\iint_A u dA = \left(\frac{\partial (UA)}{\partial x} \right) (\Delta x) \quad (3-XXXVII b)$$

El término $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho dV$, dividido entre ρ e integrado,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \left[(\Delta x) dA \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[(\Delta x) \frac{\left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) + \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)}{2} \right]$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho dV = \frac{\partial A}{\partial t} (\Delta x) \quad (3-XXXVIII)$$

Substituyendo los resultados de (3-XXXVII) y (3-XXXVIII) en la ecuación (3-XXXVI), y dividiendo entre (Δx)

$$A \frac{\delta U}{\delta x} + U \frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta A}{\delta t} = 0 \quad (3-XXXIX a)$$

ó

$$\frac{\delta(UA)}{\delta x} + \frac{\delta A}{\delta t} = 0 \quad (3-XXXIX b)$$

ecuación diferencial que describe el comportamiento de la masa a través del tiempo y espacio, en un cauce con flujo axial.

3.3.1.2 Ecuación del Impulso (Principio de Conservación de la cantidad de movimiento).

Si ahora la propiedad $\pi(x, y, z, t)$ es el producto de la velocidad por la densidad específica del fluido, $\rho \bar{v}(x, y, z, t)$, la ecuación (3-XXXIV) analiza la conservación de la cantidad de movimiento ($m\bar{v}$) de la masa del fluido.

$$\oint_{S.C.} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds + \iiint_{V.C.} \frac{\delta}{\delta t} (\rho \bar{v} dV) = \iiint_{V.C.} D(\rho, \bar{v}) \quad (3-XL)$$

Recurriendo a las mismas hipótesis consideradas en la deducción de la ecuación de continuidad (flujo unidimensional e incompresible y utilizando la velocidad media en cada sección), el primer término de la ecuación (3-XL) representa el flujo neto de cantidad de movimien-

to a través de la superficie de control en la dirección del flujo, o en otras palabras, su transporte por convección hacia el volumen de control. Refiriéndolo al volumen de control del cauce estudiado resulta:

$$\oint_{s.c.} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \iint_A u(u dA) = \iint_A u^2 dA$$

Realizando su integración:

$$\iint_A u^2 dA = \left[\left(U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left(A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \left[\frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{u}{U} \right)^3 dA \right]$$

Desarrollando los términos y haciendo las simplificaciones:

$$\iint_A u^2 dA = \frac{\partial A}{\partial x} (\Delta x) U^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial x} (\Delta x) U A + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \alpha \quad (3-XLI)$$

donde $\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{u}{U} \right)^3 dA$, es el coeficiente de Coriolis, que toma en cuenta que la distribución de la velocidad en el área no es uniforme.

Despreciando el término $\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3$ por ser muy pequeño comparado con los otros, y recordando que:

$$\frac{\partial (U^2 A)}{\partial x} = A \frac{\partial U^2}{\partial x} + U^2 \frac{\partial A}{\partial x} = 2UA \frac{\partial U}{\partial x} + U^2 \frac{\partial A}{\partial x} = U \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial A}{\partial x} \right) + UA \frac{\partial U}{\partial x}$$

la ecuación (3- XLI) se transforma en:

$$\iint_A u^2 dA = \alpha \frac{\partial (U^2 A)}{\partial x} (\Delta x) \quad (3-XLII a)$$

$$\sigma \iint_A u^2 dA = \alpha \left[U \frac{\partial(UA)}{\partial x} + UA \frac{\partial(U)}{\partial x} \right] (\Delta x) \quad (3-XLII b)$$

El segundo término de (3-XL) $\iiint_{v.c.} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v} d\tau) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \bar{v} d\tau$, al ser referido al volumen de control en análisis:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \bar{v} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} u d\tau$$

Integrando en todo el volumen de control,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} u d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(U + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}) + (U - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\Delta x}{2})}{2} \right] \left[\frac{(A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}) + (A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2})}{2} \right] (\Delta x) \left[\frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{u}{U}\right)^2 dA \right]$$

desarrollando términos y simplificando:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} u d\tau = \beta \frac{\partial(UA)}{\partial t} (\Delta x) \quad (3-XLIII a)$$

6

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} u d\tau = \beta (\Delta x) A \frac{\partial U}{\partial t} + \beta (\Delta x) U \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3-XLIII b)$$

donde $\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{u}{U}\right)^2 dA$ es el coeficiente de Boussinesq, que co-

rrige el hecho de haber considerado una velocidad media en el área transversal.

Substituyendo los resultados obtenidos de (3-XLII) y (3-XLIII), en los términos correspondientes de la ecuación (3-XL)

de las ecuaciones (a),

$$\alpha \frac{\partial(U^2 A)}{\partial x} (\Delta x) + \beta \frac{\partial(UA)}{\partial x} (\Delta x) = \left\{ \iiint_{v.c.} D[\rho, \bar{v}] \right\} \frac{1}{\rho} \quad (3-XLIV a)$$

de las ecuaciones (b),

$$\left[\alpha U \frac{\partial(UA)}{\partial x} + \alpha UA \frac{\partial U}{\partial x} + \beta A \frac{\partial U}{\partial t} + \beta U \frac{\partial A}{\partial t} \right] (\Delta x) = \iiint_{V.C.} D[\rho, \bar{v}] \frac{1}{\rho}$$

ó si $\alpha \neq \beta$, y tomando los resultados de la ecuación de continuidad (ec. 3-XXXIX b),

$$\alpha U \frac{\partial(UA)}{\partial x} + U \frac{\partial A}{\partial t} \beta = 0$$

entonces $A \left(\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} \right) (\Delta x) = \left\{ \iiint_{V.C.} D[\rho, \bar{v}] \right\} \frac{1}{\rho}$ (3-XLIV b)

La ecuación (3-XLIV a) se denomina "forma conservativa de la ecuación del impulso", y la (3-XLIV b), "forma no conservativa".

En el segundo miembro de (3-XL), las variaciones en la cantidad de movimiento son debidas a las fuerzas exteriores que actúan sobre la masa del fluido dentro del volumen de control; de ahí que la función $\iiint_{V.C.} D[\rho, \bar{v}] \frac{1}{\rho}$ representa la suma vectorial de fuerzas másicas exteriores ejercidas sobre la masa del fluido.

Las fuerzas exteriores de mayor significación son:

- a) Fuerzas debidas a la acción de la gravedad: Toman en cuenta el peso del fluido dentro del volumen de control proyectado en el sentido del flujo (fig. 3-26)

$$\frac{1}{\rho} F_g = \iiint_{V.C.} g dV \operatorname{sen} \psi = g(\Delta x) \left[\frac{(A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}) + (A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2})}{2} \right] \operatorname{sen} \psi$$

$$\frac{1}{\rho} F_g = g(\Delta x) A \sin \psi$$

Si el ángulo ψ es pequeño, el seno puede aproximarse a la tangente; $\sin \psi \doteq \tan \psi \doteq S_0$.

$$\therefore \frac{1}{\rho} F_g = g(\Delta x) A S_0 \quad (3\text{-XLV})$$

b) Fuerzas originadas por la presión: se obtienen sumando las presiones actuantes en el sentido del flujo, multiplicadas por el área donde actúan.

La distribución de presiones a lo largo de una vertical dentro de un flujo en movimiento es, en general, diferente a la hidrostática; no obstante para simplificar el análisis se supone como tal (fig. 3-25). La ley que sigue dicha distribución hidrostática es:

$$p = \rho g(H - \eta)$$

por lo tanto la fuerza F_p es:

$$F_p = \iint_A p \, dA = \iint_A \rho g(H - \eta) \, dA$$

Si B_η es el ancho del canal a la altura η , entonces

$$\frac{F_p}{\rho} = \int_0^H g(H - \eta) B_\eta \, d\eta$$

La variación de la fuerza de presión a lo largo del cauce es:

$$\frac{\delta(F_p/\rho)}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x} \left[\int_0^H g(H-\eta) B_\eta d\eta \right] = \int_0^H \frac{\delta}{\delta x} \left[g(H-\eta) B_\eta \right] d\eta \quad (3-XLVI)$$

desarrollando la diferencial:

$$\frac{\delta(F_p/\rho)}{\delta x} = \int_0^H \left[g(H-\eta) \frac{\delta B_\eta}{\delta x} \right] d\eta + \left[g B_\eta \frac{\delta(H-\eta)}{\delta x} \right] d\eta$$

o sea,

$$\frac{\delta(F_p/\rho)}{\delta x} = \int_0^H g(H-\eta) \frac{\delta B_\eta}{\delta x} d\eta + \int_0^H g B_\eta \frac{\delta(H-\eta)}{\delta x} d\eta$$

pero η es independiente de x , lo que implica que $\frac{\delta(H-\eta)}{\delta x} = \frac{\delta(H)}{\delta x}$, la cual es independiente de η , por lo tanto,

$$\int_0^H g B_\eta \frac{\delta(H-\eta)}{\delta x} d\eta = g \frac{\delta H}{\delta x} \int_0^H B_\eta d\eta = g \frac{\delta H}{\delta x} A \quad (3-XLVII)$$

Substituyendo en (3-XLVI):

$$\frac{\delta(F_p/\rho)}{\delta x} = \int_0^H g(H-\eta) \frac{\delta B_\eta}{\delta x} d\eta + g \frac{\delta H}{\delta x} A$$

$$\therefore \frac{\delta(F_p/\rho)}{\delta x} (\Delta x) = (\Delta x) \int_0^H g(H-\eta) \frac{\delta B_\eta}{\delta x} d\eta + g \frac{\delta H}{\delta x} A (\Delta x)$$

El valor de $(\Delta x) \int_0^H g(H-\eta) \frac{\delta B_\eta}{\delta x} d\eta$ es igual a la suma de las

fuerzas F_1 y F_2 , definidas en la fig. 3-25, divididas entre

(ρ), por lo tanto,

$$(\Delta x) \frac{\partial(F_p/\rho)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} (F_1 + F_2) + g \frac{\partial H}{\partial x} A(\Delta x) \quad (3\text{-XLVIII})$$

Haciendo la suma de todas las fuerzas de presión actuantes sobre el volumen de control en la dirección del flujo:

$$\sum \frac{\bar{F}_p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left[\left(F_p - \frac{\partial F_p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(F_p + \frac{\partial F_p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - (F_1 + F_2) \right] \cos \psi$$

$$\therefore \sum \frac{\bar{F}_p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial F_p}{\partial x} (\Delta x) - F_1 - F_2 \right] \cos \psi$$

Substituyendo los resultados de (3-XLVIII) y suponiendo que $\cos \psi \rightarrow 1$,

$$\sum \frac{\bar{F}_p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left[-\left(-(F_1 + F_2) + g \frac{\partial H}{\partial x} A(\Delta x) \right) - F_1 - F_2 \right]$$

$$\therefore \sum \frac{\bar{F}_p}{\rho} = -gA(\Delta x) \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3\text{-XLIX})$$

- c) Fuerzas producto de la fricción en la interfase agua-frontera sólida: Si τ_0 es el esfuerzo cortante en un punto de la interfase, la fuerza total originada por este esfuerzo es igual a la integra-

ción en toda el área de la interfase agua-frontera sólida, A^* ;

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = \iint_{A^*} -\tau_o dS_m$$

donde S_m es la superficie de la interfase agua-frontera sólida; integrando:

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = -\frac{1}{\rho} \tau_o w \Delta x$$

donde w es el perímetro mojado por el flujo; $\tau_o = \rho g R S_f$

(Ref. 18); (radio hidráulico) $R = \frac{A}{w}$; S_f es la pendiente de la línea total de energía (pendiente hidráulica)

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = -g \frac{A}{w} S_f w \Delta x$$

Simplificando,

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = -g A S_f \Delta x$$

Substituyendo las ecuaciones 3-XLV, XLIX y L en la

(3-XLIV a):

$$\alpha \frac{\partial(U^2 A)}{\partial x} (\Delta x) + \beta \frac{\partial(UA)}{\partial t} (\Delta x) = g(\Delta x) A S_o - g A (\Delta x) \frac{\partial H}{\partial x} - g A S_f (\Delta x)$$

dividiendo entre (Δx) y arreglando términos:

$$\alpha \frac{\partial(U^2 A)}{\partial x} + \beta \frac{\partial(UA)}{\partial t} + g A \frac{\partial H}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \quad (3-LI a)$$

ción en toda el área de la interfase agua-frontera sólida, A^* ;

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = \iint_{A^*} \tau_o dS_m$$

donde S_m es la superficie de la interfase agua-frontera sólida; integrando:

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = - \frac{1}{\rho} \tau_o w \Delta x$$

donde w es el perímetro mojado por el flujo; $\tau_o = \rho g R S_f$

(Ref. 18); (radio hidráulico) $R = \frac{A}{w}$; S_f es la pendiente de la línea total de energía (pendiente hidráulica)

$$\therefore \frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = - g \frac{A}{w} S_f w \Delta x$$

Simplificando,

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_\tau = - g A S_f \Delta x$$

Substituyendo las ecuaciones 3-XLV, XLIX y L en la

(3-XLIV a):

$$\alpha \frac{\partial(U^2 A)}{\partial x} (\Delta x) + \beta \frac{\partial(UA)}{\partial t} (\Delta x) = g(\Delta x) A S_o - g A (\Delta x) \frac{\partial H}{\partial x} - g A S_f (\Delta x)$$

dividiendo entre (Δx) y arreglando términos:

$$\alpha \frac{\partial(U^2 A)}{\partial x} + \beta \frac{\partial(UA)}{\partial t} + g A \frac{\partial H}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \quad (3-LI a)$$

o substituyendo 3-XLV, XLIX y L en (3-XLIV b)

$$A \left(\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} \right) (\Delta x) = g(\Delta x) A S_0 - g(\Delta x) A \frac{\partial H}{\partial x} - g(\Delta x) A S_f$$

que dividida entre $A(\Delta x)$ y con sus términos dispuestos convenientemente resulta:

$$\beta \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (3-LI b)$$

Las ecuaciones 3-LI, a y b son respectivamente las ecuaciones del impulso para un flujo no permanente en un canal prismático en sus formas "conservativa" y "no conservativa".

3.3.2 Ecuaciones características

Hasta aquí, se ha obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales parciales reproductoras del comportamiento en el tiempo de un flujo incompresible y unidimensional. Si en las ecuaciones de dicho sistema, 3-XXXIX y 3-LI, $\alpha = \beta = 1$, se tiene:

$$\frac{\partial (UA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3-XXXIX b)$$

(Ecuación de continuidad)

$$S_f = S_o - \frac{\delta H}{\delta x} - \frac{U}{g} \frac{\delta U}{\delta x} - \frac{1}{g} \frac{\delta U}{\delta t} \quad (3-LI b)$$

TIPO DE FLUJO QUE
REPRESENTA

Uniforme establecido

No uniforme establecido

Transitorio

(Ecuación del Impulso y Can-
tidad de movimiento)

Si se toma en cuenta que en un drenaje pluvial, generalmente prisma-
mático, la variación del ancho de la superficie libre es lenta com-
parada con la del tirante, y suponiendo que el área A es igual al
producto del ancho (B) por el tirante (H), al substituir en la ecua-
ción (3-XXXIX b), y dividir entre B, el sistema se transforma en:

$$U \frac{\delta H}{\delta x} + H \frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta H}{\delta t} = 0 \quad (3-LII)$$

$$U \frac{\delta U}{\delta x} + g \frac{\delta H}{\delta x} + \frac{\delta U}{\delta t} - g (S_o - S_f) = 0 \quad (3-LIII)$$

Expresando el sistema en forma matricial:

$$[a][X] + [b][T] + [d] = 0 \quad (3-LIV)$$

donde cada término representa:

$$[X] = \begin{bmatrix} \frac{\delta H}{\delta x} \\ \frac{\delta U}{\delta x} \end{bmatrix} ; \quad [T] = \begin{bmatrix} \frac{\delta H}{\delta t} \\ \frac{\delta U}{\delta t} \end{bmatrix}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} U & H \\ g & U \end{bmatrix} ; \quad [b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [d] = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_o - S_f) \end{bmatrix}$$

El sistema es del tipo hiperbólico, y puede transformarse linealmente en uno nuevo equivalente de primer orden, cuya solución es más sencilla (Ref. 6).

Sometiendo el sistema a la transformación $[Y]$, cuyo determinante es cero, se obtiene el nuevo sistema, equivalente al original, y cada solución del original, lo es del equivalente. Además, los coeficientes y_{ij} de la transformación dependen de x , t ó U , pero no de las derivadas de U , esto es:

$$[Y][a][X] + [Y][b][T] + [Y][d] = 0 \quad (3-LV)$$

en donde,

$$[Y][a] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & H \\ g & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}U + y_{12}g & y_{11}H + y_{12}U \\ y_{21}U + y_{22}g & y_{21}H + y_{22}U \end{bmatrix} \quad (3-LVI)$$

$$[Y][b] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (3-LVIII)$$

$$[Y][d] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_o - S_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(S_o - S_f) y_{12} \\ -g(S_o - S_f) y_{22} \end{bmatrix} \quad (3-LVIII)$$

Si se hace que $[Y][a] = [C][Y][b]$ (3-LIX) donde $[C]$ es una matriz diagonal, y (ξ, η) es un vector de longitud unitaria tal que un elemento de la matriz C , p. ej. C_{vv} , cumpla con $C_{vv} = \xi/\eta$, la expresión $C_{vv} \cdot X_i \cdot t_i = (x\xi + t\eta)/\eta$ representa, excepto para $1/\eta$, la derivada direccional de U_i en la dirección definida por el vector (ξ, η) .

Para calcular C_{vv} se observa que la condición de igualdad para el v -ésimo renglón en los miembros de la ecuación (3-LIX).

$$\sum_{\mu=1}^n t_{v\mu} a_{\mu i} = \sum_{\mu=1}^n C_{vv} t_{v\mu} b_{\mu i} \quad \forall i$$

representa un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales homogéneas para $t_{v,1}, t_{v,2}, \dots, t_{v,n}$

$$\therefore \det ([a] - [C_v][b]) = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} U & H \\ g & U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\therefore C_1 = U \pm \sqrt{gH}$$

$$\text{análogamente, } C_2 = U \pm \sqrt{gH}$$

$$\therefore \xi = \frac{dx}{dt} = U + \sqrt{gH} \quad (3-LX a)$$

$$\therefore \eta = -\frac{dx}{dt} = U - \sqrt{gH} \quad (3-LX b)$$

Los vectores ξ , η determinan las llamadas direcciones características.

Substituyendo los resultados correspondientes en (3-LIX).

$$\begin{bmatrix} y_{11}U + y_{12}g & y_{11}H + y_{12}U \\ y_{21}U + y_{22}g & y_{21}H + y_{22}U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + \sqrt{gH} & 0 \\ 0 & U - \sqrt{gH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando $y_{11} = 1$, $y_{21} = -1$, se obtiene:

$$y_{12} = \sqrt{\frac{H}{g}} \quad ; \quad y_{22} = -\sqrt{\frac{H}{g}}$$

$$\therefore [Y] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{H/g} \\ 1 & -\sqrt{H/g} \end{bmatrix}$$

$$[Y] [a] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{H/g} \\ 1 & -\sqrt{H/g} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & H \\ g & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + \sqrt{gH} & H + U \sqrt{H/g} \\ U - \sqrt{gH} & H - U \sqrt{H/g} \end{bmatrix}$$

$$[Y] [b] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{H/g} \\ 1 & -\sqrt{H/g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{H/g} \\ 1 & -\sqrt{H/g} \end{bmatrix}$$

$$[Y] [d] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{H/g} \\ 1 & \sqrt{H/g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_o - S_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(S_o - S_f) g \sqrt{H/g} \\ (S_o - S_f) g \sqrt{H/g} \end{bmatrix}$$

Si estos resultados se substituyen en la ecuación (3-LV) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} (U + \sqrt{gH}) & (H + U \sqrt{H/g}) \\ (U - \sqrt{gH}) & (H - U \sqrt{H/g}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{H/g} \\ 1 & -\sqrt{H/g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(S_o - S_f) g \sqrt{H/g} \\ (S_o - S_f) g \sqrt{H/g} \end{bmatrix} = 0 \quad (3-LXI)$$

Desarrollando el sistema matricial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} (U + \sqrt{gH}) + \frac{\partial U}{\partial x} (H + U \sqrt{H/g}) + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \sqrt{H/g} = \\ = (S_o - S_f) \sqrt{H/g} \cdot g \quad (3-LXI a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} (U - \sqrt{gH}) + \frac{\partial U}{\partial x} (H - U \sqrt{H/g}) + \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \sqrt{H/g} &= \\ &= g (S_0 - S_f) \sqrt{H/g} \quad (3-LXI b) \end{aligned}$$

El término $(H \pm U \sqrt{H/g})$, si se divide y multiplica por $\pm \sqrt{H/g}$, se obtiene: $\pm (\sqrt{H/g}) (U \pm \sqrt{gH})$, que substituidas en (3-LXI a y b) respectivamente, y disponiendo convenientemente sus términos proporciona:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial H}{\partial x} (U + \sqrt{gH}) + \frac{\partial H}{\partial t} \right] + \sqrt{H/g} \left[\frac{\partial U}{\partial x} (U + \sqrt{gH}) + \frac{\partial U}{\partial t} \right] &= \\ &= g (S_0 - S_f) \sqrt{H/g} \quad (3-LXII a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial H}{\partial x} (U - \sqrt{gH}) + \frac{\partial H}{\partial t} \right] - \sqrt{H/g} \left[\frac{\partial U}{\partial x} (U - \sqrt{gH}) + \frac{\partial U}{\partial t} \right] &= \\ &= - (S_0 - S_f) g \sqrt{H/g} \quad (3-LXII b) \end{aligned}$$

La derivada total de una función $\psi(x,t)$ es: $= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt$

$$\therefore \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Si $\psi(x,t) = H$ ó $\psi(x,t) = U$, y $\frac{dx}{dt} = (U + \sqrt{gH}) = \xi$, en la

ecuación (3-XLII a) se obtiene:

$$\frac{dH}{dt} + \sqrt{H/g} \frac{dU}{dt} = g(S_o - S_f) \sqrt{H/g}$$

ecuación que multiplicada por $\sqrt{g/H}$ dt resulta:

$$dH \sqrt{g/H} + dU = g(S_o - S_f) dt \quad (3-LXIII a)$$

Pero si se tiene en cuenta que

$$d(2 \sqrt{gH}) = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{g} H^{-1/2} \right) dH = dH \sqrt{g/H}$$

entonces, en la ecuación (3-XLIII a)

$$dH (\sqrt{g/H}) + dU = d(2 \sqrt{gH}) + dU = d(U + 2 \sqrt{gH})$$

$$d(U + 2 \sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt \quad (3-LXIV a)$$

Análogamente, si en (3-LXII a) $\psi(x, t)$ es igual a H ó U y $\frac{dx}{dt} =$

$$(U - \sqrt{gH}) = \eta$$

$$d(U - 2 \sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt \quad (3-LXIV b)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales características de primer orden es:

$$d(U + 2 \sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt ; \quad \frac{dx}{dt} = (U + \sqrt{gH}) = \xi \quad (3-LXV a)$$

$$d(U - 2 \sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt ; \quad \frac{dx}{dt} = (U - \sqrt{gH}) = \eta \quad (3-LXV b)$$

Las ecuaciones 3-LXV a y b son una pareja de ecuaciones diferenciales totales, de las cuales,

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{gH}, \quad (3-LXVI \text{ a y b})$$

definen las familias de curvas típicas, tales como las curvas ξ y η en el plano $x-t$ (fig. 3-27), llamadas curvas "características", pertenecientes a las soluciones de $U(x,t)$ y $H(x,t)$.

Las dos familias forman una malla de coordenadas curvilíneas, a lo largo de las cuales, y únicamente a lo largo de ellas, se cumplen las ecuaciones $d(U \pm 2\sqrt{gH}) = g(S_0 - S_f) dt$.

Si estas últimas se integran en las direcciones características ξ y η , se obtiene la solución de U y H en cada punto.

3.3.3 Integración de los métodos hidráulicos

La integración analítica del sistema es posible únicamente en casos muy simples, por lo cual es necesario recurrir a modelos o esquemas de diferencias finitas que lo integren en tramos finitos de cauce y en intervalos finitos de tiempo, de tal forma que la solución se obtiene aproximando las derivadas con diferencias finitas y los valores puntuales con promedios.

En la figura 3-28 se definió una malla ortogonal con intervalos de tiempo (Δt) y de longitud (Δx) . A cada punto de la malla le corresponde una

solución diferente de la velocidad (U) y del tirante (H). Para distinguir cada una de estas soluciones se utiliza la siguiente notación:

- a) Los superíndices en una variable indican el intervalo al cual corresponden, partiendo del origen. Por ejemplo, la velocidad en un tiempo $t = k(\Delta t)$, donde $k=1, 2, \dots$, se denota como U^k ; en un tiempo $t = k \cdot (\Delta t) + \Delta t$, U^{k+1} , etc..
- b) Los subíndices indican la sección del cauce en donde se localiza el valor de la variable. Por ejemplo, el tirante en una sección i del canal, se expresa como H_i ; el de la sección $i - (\Delta x)$, H_{i-1} , etc..

Con base en esta notación, la velocidad y el tirante en un punto R del plano $x-t$ con coordenadas $(i(\Delta x), j(\Delta t))$, se expresan como $U_{i,j}^j$ y $H_{i,j}^j$ respectivamente.

3.3.3.1 Un método implícito a partir de las ecuaciones integrales

De los enfoques más directos para calcular el comportamiento a través del tiempo del flujo en un cauce, es aplicar directamente las ecuaciones integrales de conservación de la masa y del movimiento, (3-XXXV) y (3-XL) respectivamente. Si la primera, 3-XXXV, se integra sobre el volumen de control de un cauce unidimensional (fig. 3-29), donde $\bar{v} = U$ y $\bar{n} \cdot ds = dA$, con flujo incompresible, esto es $\rho = \text{constante}$, al dividirla entre ρ , la densidad específica del fluido (ρ) puede eliminarse como variable en toda la ecuación, obteniéndose:

Para el término que evalúa el flujo neto,

$$\iint_A U \cdot dA = U_i A_i - U_{i+1} A_{i+1} \quad (3-LXVII)$$

Para la variación en el tiempo, de la masa dentro del volumen de control,

$$\iiint_{v.c.} \frac{\partial}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} (V) = \frac{\partial}{\partial t} [(\Delta x) A_M]$$

donde A_M es el área promedio entre las secciones de aguas arriba y aguas abajo del volumen de control.

Dado que los incrementos (Δx) se supusieron constantes, que el área media en una sección es aproximadamente igual al producto $B_M H$ (siendo B_M el ancho medio en el intervalo, y H el tirante en la sección central del tramo), y que el ancho no varía significativamente en un intervalo de tiempo $(\frac{\partial B_M}{\partial t} \doteq 0)$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\Delta x) A_M] \doteq (\Delta x) B_M \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3-LXVIII)$$

En términos de diferencias finitas:

$$B_M = \frac{B_i + B_{i+1}}{2}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{(\Delta t)}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} [(\Delta x) A_M] = (\Delta x) \frac{B_i + B_{i+1}}{2} \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{(\Delta t)}$$

Substituyendo este último resultado, y el obtenido en (3-LXVII) en la ecuación de continuidad:

$$U_i A_i - U_{i+1} A_{i+1} + (\Delta x) \frac{B_i + B_{i+1}}{2} \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{(\Delta t)} = 0$$

En un sistema de drenaje, el fondo de los cauces es generalmente fijo, esto implica que $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, por lo cual $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}$ pero $H + z = h$

(fig. 3-29), entonces $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{(\Delta t)}$

$$\therefore U_i A_i - U_{i+1} A_{i+1} + (\Delta x) \frac{B_i + B_{i+1}}{2} \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{(\Delta t)} = 0$$

$$\therefore h_i^{k+1} - h_i^k = - (U_i A_i - A_{i+1} U_{i+1}) \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)} \frac{2}{B_i + B_{i+1}} \quad (3-LXIX)$$

En la ecuación de la conservación del impulso, 3-XL, con base en la figura 3-29 y las hipótesis usadas en la ecuación anterior, el término convectivo, $\iint_S \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) \, ds$ se expresa como $\iint_A U(U \cdot dA)$; y en diferencias

finitas:

$$\iint_A U(U \cdot dA) = U_i \left[(UA)_{M_{i+1}} - (UA)_{M_i} \right]$$

donde $(UA)_{M_j}$ es el valor promedio del producto UA, valuados en

$x = (j-1)(\Delta x)$, y $x = j(\Delta x)$:

$$(UA)_{M_j} = \frac{(U_{j-1} A_{j-1} + U_j A_j)}{2}$$

$$\therefore U_i \left[(UA)_{M_{i+1}} - (UA)_{M_i} \right] = \frac{U_i A_i + U_{i+1} A_{i+1}}{2} - \frac{U_{i-1} A_{i-1} + U_i A_i}{2}$$

$$\therefore \iiint_A U (U dA) = U_i \left[\frac{U_{i+1} A_{i+1} - U_{i-1} A_{i-1}}{2} \right] \quad (3-LXX)$$

El término $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \bar{v} dV$, es igual a: $\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t} U dV$, refiriéndolo

al volumen de control en diferencias finitas,

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t} U dV = \iiint_{V.C.} \frac{\partial U}{\partial t} dV = \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{(\Delta t)} (\Delta x) A_i \quad (3-LXXI)$$

Las fuerzas exteriores al volumen de control que actúan en la dirección del movimiento son debidas a:

- a) Presión y peso propio. Con base en la figura 3-30, donde se supone que las presiones se distribuyen hidrostáticamente en una vertical, la resultante de la suma de las presiones que actúan en una sección del volumen de control, más las presiones de la sección opuesta, es una presión constante, que va desde la plantilla hasta la superficie libre de la sección cuya superficie libre tiene la elevación mínima (h(E.M.)); más una presión uniformemente decreciente desde dicha superficie hasta la elevación de la superficie libre de la sección opuesta.

La fuerza másica ejercida por la presión constante $\left(\frac{F_c}{\rho}\right)$ es:

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_c = \left[(H_{i-1} + z_{i-1}) - (H_i + z_i) \right] A_M (E.M.) (g)$$

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_c = -g (h_i - h_{i-1}) A_M (\text{E.M.})$$

(3-LXXII)

La fuerza másica originada por la presión uniformemente decreciente:

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_d = g (A_{M_{i-1}} - A_{M_i}) \frac{(H_{i-1} + z_{i-1}) - (H_i + z_i)}{2}$$

En estas ecuaciones A_M (E.M.) es el área media en la sección con elevación de la superficie libre mínima; A_{M_j} es el área promedio en la sección j -ésima; el término $\frac{(H_{i-1} + z_{i-1}) - (H_i + z_i)}{2}$ es la posición del centroide de la fracción de sección entre las elevaciones mínima y máxima, ya que $F = \rho g A z_g$ donde z_g es la posición del centroide en el sentido vertical, medido a partir de la superficie libre.

Por otro lado, como se ha venido considerando que $A = BH$,

$$(A_{M_{i-1}} - A_{M_i}) = (h_{i-1} - h_i) B_{M_i} = - (h_i - h_{i-1}) B_{M_i}$$

donde B_{M_i} es el ancho medio entre $x = i-1 (\Delta x)$, y $x = i (\Delta x)$

$$\therefore \frac{1}{\rho} \bar{F}_d = g (h_i - h_{i-1}) B_{M_i} (h_i - h_{i-1}) \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} \bar{F}_p = -g A_M (\text{E.M.}) (h_i - h_{i-1}) + g (h_i - h_{i-1}) B_{M_i} (h_i - h_{i-1})$$

$$\frac{1}{\rho} \bar{F}_p = -g (h_i - h_{i-1}) \left[A_M (\text{E.M.}) - \frac{B_{M_i}}{2} (h_i - h_{i-1}) \right]$$

(3-LXXIII)

b) Fricción en el perímetro mojado (w). De la formula de Chézy, el esfuerzo cortante τ es (Ref. 2):

$$|\tau| \sim v^2 \quad ; \quad \tau = - \frac{\rho g}{C^2} U |U|$$

Este esfuerzo integrado en el perímetro mojado ($w = \frac{A_i}{R_i}$) del volumen de control, y dividiendo entre ρ , queda entonces como:

$$\frac{F_\tau}{\rho} = - g |U_i| \cdot U_i A_i \frac{(\Delta x)}{(C_i)^2 R_i}$$

donde R_i es el radio hidráulico en la sección central del volumen de control.

Substituyendo los resultados encontrados en la ecuación del impulso, se obtiene:

$$\begin{aligned} & -(U_{i-1} A_{i-1} - U_{i+1} A_{i+1}) \frac{U_i}{2} + \left[\frac{A_i}{t} (U_i^{k+1} - U_i^k) (\Delta x) \right] = \\ & = - g (h_i - h_{i-1}) \left[A_M (E.M.) - \frac{B_{M_i}}{2} (h_i - h_{i-1}) \right] - g \frac{|U_i| U_i}{(C_i)^2 R_i} (A_i) (\Delta x) \end{aligned}$$

multiplicando todo por $\frac{(\Delta t)}{(\Delta x) A_i}$ y despejando a $(U_i^{k+1} - U_i^k)$:

$$\begin{aligned} (U_i^{k+1} - U_i^k) = & - \frac{\left[U_{i+1} \left(\frac{A_{i+1}}{A_i} \right) - U_{i-1} \left(\frac{A_{i-1}}{A_i} \right) \right] \frac{U_i (\Delta t)}{2}}{(\Delta x)} - \frac{|U_i| U_i}{(C_i)^2 R_i} g (\Delta t) - \\ & - \frac{\left[(h_i - h_{i-1})^2 \right] \frac{g (B_{M_i}) (\Delta t)}{2 A_i}}{(\Delta x)} - \frac{(h_i - h_{i-1}) \frac{g A_M (E.M.) (\Delta t)}{A_i}}{(\Delta x)} \end{aligned}$$

(3-LXXIV)

El conjunto de ecuaciones aplicado a todo lo largo del canal, excepto para $x=0$ y $x=\lambda$, forman un sistema implícito de $(2(\lambda+1) - 2)$ ecuaciones con $2(\lambda+1)$ incógnitas. Las dos ecuaciones adicionales para hacer el sistema soluble, son las condiciones de las fronteras aguas arriba y aguas abajo.

Expresando en forma matricial el sistema formado, se tendrá:

En las ecuaciones (3-LXIX) y (3-LXXIV), las variables del miembro izquierdo tienen bien definido el instante al que pertenecen, pues forman una derivada respecto al tiempo en el intervalo de cálculo; en cambio las variables del miembro derecho deben tomar un valor correspondiente a un instante intermedio en el intervalo, ya que como se indicó, se utilizan valores medios.

La no linealidad del sistema de ecuaciones implica dificultades numéricas en su solución, por lo que conviene linealizarlo, procurando mantener las ventajas de estabilidad. Esto se logra tomando la mayor cantidad de valores de las variables para el instante $k+1$, que mantenga el sistema de ecuaciones lineal. El resto de las variables toma valores del instante k .

Adoptando la conveniencia de linealidad, las ecuaciones (3-LXIX) y (3-LXXIV) se pueden escribir con los superíndices en el tiempo:

$$h_i^{k+1} - h_i^k = \frac{2 \cdot (\Delta t) (A_{i+1}^k U_{i+1}^{k+1} - A_i^k U_i^{k+1})}{(B_i^k + B_{i+1}^k) (\Delta x)} \quad (3-LXXV)$$

$$U_i^{k+1} - U_i^k = - \frac{U_i^{k+1} (\Delta t) \left(U_{i+1}^k \frac{A_{i+1}^k}{A_i^k} - U_{i-1}^k \frac{A_{i-1}^k}{A_i^k} \right)}{(\Delta x)} - \frac{|U_i^k| U_i^{k+1} g(\Delta t)}{(C_i^k)^2 (R_i^k)}$$

$$- \frac{g B_{M_i}^k (\Delta t)}{2 A_i^k} (h_i^k - h_{i-1}^k) \frac{g A_{M_i}^k (E. M.) (\Delta t)}{A_i^k} \quad (h_i^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}) \quad (3-LXXVI)$$

sistema que es fácil de resolver sin tener que invertir la matriz.

Al resolver el sistema para todos los (Δt) , se obtiene el comportamiento del flujo a través del tiempo y espacio.

3.3.3.2 Un esquema implícito

Sea el mismo plano $x-t$ de la figura 3-28 y el tramo de cauce de la figura 3-29. En el cauce, el área transversal en cualquier sección se aproxima con el producto del tirante en ella (H) por el ancho hidráulico medio de la misma (B).

Las ecuaciones diferenciales parciales para un flujo transitorio en un cauce análogo al de la figura 3-29 son:

$$B \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (UA)}{\partial x} = 0 \quad (3-LXXVII)$$

(Continuidad)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} - g (S_0 - S_f) = 0 \quad (3-LXXVIII)$$

(Impulso)

Los distintos términos que forman la ecuación del impulso, expresados en diferencias finitas y basándose en la figura 3-29 son:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{(\Delta t)}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_i^{k+1} \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2 (\Delta x)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_i^{k+1} - H_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)} \quad \therefore \quad g \frac{\partial H}{\partial x} = g \frac{H_i^{k+1} - H_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)}$$

$$S_o = -\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z_i^{k+1} - z_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)} \quad \therefore \quad -g S_o = g \frac{z_i^{k+1} - z_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)}$$

S_f , de la fórmula de Manning,

$$S_f = \frac{|U_i^k| U_i^{k+1}}{(R_i^k)^{4/3}} (n_i)^2 \quad \therefore \quad g S_f = \frac{|U_i^k| U_i^{k+1}}{(R_i^k)^{4/3}} g (n_i)^2$$

substituyendo estos resultados en (3-LXXII),

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{(\Delta t)} = U_i^{k+1} \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2(\Delta x)} + g \frac{H_i^{k+1} - H_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)} + g \frac{z_i^{k+1} - z_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)} + \frac{|U_i^k| U_i^{k+1}}{(R_i^k)^{4/3}} g (n_i)^2 = 0$$

pero $H + z = h$ (fig. 3-29), por lo cual, al multiplicar por (Δt) y despejar U_i^{k+1} se obtiene:

$$U_i^{k+1} = \left\{ U_i^k - \frac{h_i^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)} g (\Delta t) \right\} \frac{1}{1 + \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2(\Delta x)} (\Delta t) + \frac{U_i^k g (n_i)^2}{(R_i^k)^{4/3}} (\Delta t)}$$

(3-LXXIX)

Análogamente:

$$U_{i+1}^{k+1} = \left\{ U_{i+1}^k - \frac{h_{i+1}^{k+1} - h_i^{k+1}}{(\Delta x)} g(\Delta t) \right\} \frac{1}{1 + \frac{U_{i+2}^k - U_i^k}{2(\Delta x)} (\Delta t) + \frac{|U_{i+1}^k| (n_{i+1}^k)^2 g(\Delta t)}{(R_{i+1}^k)^{4/3}}$$

(3-LXXX)

Por otro lado, se tiene que las componentes de la ecuación de continuidad puestas en diferencias finitas (con base en el volumen de control de la figura 3-29):

$$\frac{\partial(UA)}{\partial x} = \frac{U_{i+1}^{k+1} A_i^k - U_i^{k+1} A_{i+1}^k}{(\Delta x)} \quad (3-LXXXI)$$

Considerando que el cauce se supone de fondo fijo ($\frac{\partial z}{\partial t} = 0$), el término $\frac{\partial H}{\partial t}$ puede expresarse como:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial (H+z)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

que en diferencias finitas resulta:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{(\Delta t)} \quad \therefore B \frac{\partial h}{\partial t} = B_i^k \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{(\Delta t)} \quad (3-LXXXII)$$

substituidas (3-LXXXI) y (3-LXXXII) en (3-LXXVII) resulta:

$$\frac{B_i^k (h_i^{k+1} - h_i^k)}{(\Delta t)} + \frac{(U_{i+1}^{k+1} A_{i+1}^k - U_i^{k+1} A_i^k)}{(\Delta x)} = 0$$

De las ecuaciones (3-LXXIX) y (3-LXXX) :

$$B_i^k \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{(\Delta t)} + \frac{A_{i+1}^k \left[U_{i+1}^k - \frac{h_{i+1}^{k+1} - h_i^{k+1}}{(\Delta x)} g(\Delta t) \right]}{\Delta x + \frac{U_{i+2}^k - U_i^k}{2} (\Delta t) + \frac{|U_{i+1}^k| (n_{i+1})^2 g(\Delta x)(\Delta t)}{(R_i^k)^{4/3}}}$$

$$\frac{A_i^k \left[U_i^k - \frac{h_i^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)} g(\Delta t) \right]}{\Delta x + \frac{|U_i^k| (n_i)^2 g(\Delta x)(\Delta t)}{(R_i^k)^{4/3}} + \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2} (\Delta t)} = 0 \quad (3-LXXXIII)$$

Denominando $F_i = \Delta x + \frac{|U_i^k| g(n_i)^2 (\Delta x)(\Delta t)}{(R_i^k)^{4/3}} + \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2} (\Delta t)$,

y $F_{i+1} = \Delta x + \frac{|U_{i+1}^k| g(n_{i+1})^2 (\Delta x)(\Delta t)}{(R_{i+1}^k)^{4/3}} + \frac{U_{i+2}^k - U_i^k}{2} (\Delta t)$,

substituyendo en la ecuación (3-LXXXIII) :

$$B_i^k \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{(\Delta t)} + \frac{A_{i+1}^k \left[U_{i+1}^k - \frac{h_{i+1}^{k+1} - h_i^{k+1}}{(\Delta x)} g(\Delta t) \right]}{F_{i+1}} - \frac{A_i^k \left[U_i^k - \frac{h_i^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)} g(\Delta t) \right]}{F_i} = 0$$

Factorizando:

$$h_i^{k+1} \left[\frac{B_i^k}{(\Delta t)} + \frac{A_{i+1}^k g(\Delta t)}{(\Delta x) F_{i+1}} + \frac{A_i^k \cdot g(\Delta t)}{(\Delta x) F_i} \right] - h_{i-1}^{k+1} \left[\frac{g(\Delta t) A_i^k}{(\Delta x) F_i} \right] - h_{i+1}^{k+1} \frac{A_{i+1}^k g(\Delta t)}{(\Delta x) F_{i+1}} + \frac{A_{i+1}^k U_{i+1}^k}{F_{i+1}} - \frac{A_i^k U_i^k}{F_i} - \frac{B_i^k h_i^k}{\Delta t} = 0$$

Por lo tanto queda una ecuación que involucra las incógnitas h_{i-1}^{k+1} ,

h_i^{k+1} y h_{i+1}^{k+1} y un término independiente.

Haciendo lo propio para los puntos del canal comprendidos entre $x = (\Delta x)$

y $x = (\lambda - 1) (\Delta x)$ se obtiene:

$$f(h_0^{k+1}, h_1^{k+1}, h_2^{k+1}, TI) = 0 \quad \text{para } i = 1$$

$$f(h_1^{k+1}, h_2^{k+1}, h_3^{k+1}, TI) = 0 \quad \text{para } i = 2$$

⋮

$$f(h_{j-2}^{k+1}, h_{j-1}^{k+1}, h_j^{k+1}, TI) = 0 \quad \text{para } i = j-1$$

$$f(h_{j-1}^{k+1}, h_j^{k+1}, h_{j+1}^{k+1}, TI) = 0 \quad \text{para } i = j$$

⋮

$$f(h_{\lambda-3}^{k+1}, h_{\lambda-2}^{k+1}, h_{\lambda-1}^{k+1}, TI) = 0 \quad \text{para } i = \lambda - 2$$

$$f(h_{\lambda-2}^{k+1}, h_{\lambda-1}^{k+1}, h_{\lambda}^{k+1}, TI) = 0 \quad \text{para } i = \lambda - 1$$

Puesto en forma matricial:

se cuenta entonces con $(\lambda + 1) - 2$ ecuaciones con $(\lambda + 1)$ incógnitas.

Las dos ecuaciones que faltan, son precisamente las condiciones de frontera para las fronteras de aguas abajo y aguas arriba, que involucran las incógnitas h_0 y h_1 en el punto $x=0$, y, $h_{(\lambda - 1)}$ y h_λ para el punto $x=\lambda$.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones por resolver en cada intervalo de tiempo Δt , es un sistema en que sólo la diagonal principal y sus elementos inmediatos adyacentes en cada renglón tienen algún valor (sistema tridiagonal), siendo los demás elementos de la matriz iguales a cero. Este tipo de sistemas de ecuaciones es fácilmente soluble con la ayuda de una computadora.

3.3.3.3 Ecuaciones características

El sistema de ecuaciones a integrar es:

$$d(U + 2\sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt;$$

(3-LXV a)

$$\frac{dx}{dt} = (U + \sqrt{gH})$$

y

$$d(U - 2\sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt;$$

(3-LXV b)

$$\frac{dx}{dt} = (U - \sqrt{gH})$$

Para substituir las derivadas por diferencias finitas, se propone el siguiente esquema:

$$dx = \begin{cases} x_{i+1} - x_i \\ \text{ó} \\ x_i - x_{i-1} \end{cases}$$

$$dt = (\Delta t)$$

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{x=i}^{t=k} = V_i^{k+1} - V_i^k, \text{ etc.}$$

La integración del sistema de ecuaciones (3-LXV) para calcular la velocidad V_i^{k+1} y el tirante H_i^{k+1} en un punto $P(x_i, t^{k+1})$ del plano $x-t$, se hace a partir de las condiciones iniciales, o con base en los valores U y H del intervalo de tiempo anterior, recurriendo a las siguientes hipótesis:

- a) El incremento de tiempo Δt es suficientemente pequeño como para que el tramo de curva característica, ξ_p ó η_p , que van desde el punto P al E y G respectivamente, puedan considerarse líneas rectas (fig. 3-31).
- b) La pendiente de las líneas características que pasan por P , PE y PG (fig. 3-31) son las del punto $F(x_i, t^k)$

$$\xi_p = \frac{dx}{dt} \Big|_P = \xi_F = \frac{dx}{dt} \Big|_F = U_F^k + \sqrt{gH_F^k} = U_i^k + \sqrt{gH_i^k}$$

$$\eta_p = \left. \frac{dx}{dt} \right|_p \approx \eta_F \quad \eta_F = \left. \frac{dx}{dt} \right|_F = U_F^k - \sqrt{gH_F^k} = U_i^k - \sqrt{gH_i^k}$$

La localización del punto E (x_E, t^k) para obtener la velocidad y el tirante en él e integrar a partir de estos últimos la ecuación $d(U + 2\sqrt{gH}) = g(S_0 - S_f)dt$, se hace con base en la característica positiva ξ que pasa por P (x_i, t^{k+1}) supuesta igual a la del punto F (x_i, t^k) (hipótesis a):

$$\xi_p = \left. \frac{dx}{dt} \right|_F = \frac{x_i - x_E}{\Delta t} = U_i^k + \sqrt{gH_i^k}$$

$$\therefore x_E = x_i - (U_i^k + \sqrt{gH_i^k}) \Delta t \quad (3-LXXXIV)$$

La estimación de la velocidad y el tirante en el punto E, se realiza con una interpolación de los tirantes y las velocidades en los puntos anterior y posterior al analizado. Si estos son el x_j y el x_{j+1} (fig. 3-32) y la interpolación es lineal:

$$\frac{U_E^k - U_j^k}{x_E - x_j} = \frac{U_{j+1}^k - U_j^k}{(\Delta x)} \Rightarrow U_E^k = U_j^k + \frac{U_{j+1}^k - U_j^k}{(\Delta x)} (x_E - x_j)$$

(3-LXXXV)

con un procedimiento análogo:

$$H_E^k = H_j^k + \frac{H_{j+1}^k - H_j^k}{(\Delta x)} (x_E - x_j) \quad (3-LXXXVI)$$

En forma similar, el punto G (x_G, t^k) y el tirante y la velocidad en ese

punto resultan (fig. 3-32):

$$x_G = x_i + (U_i^k - \sqrt{gH_i^k}) \Delta t \quad (3-LXXXVII)$$

el cual se localiza entre los puntos x_m y x_{m+1} de la malla:

$$U_G^k = U_m^k + \frac{(U_{m+1}^k - U_m^k)}{(\Delta x)} (x_G - x_m) \quad (3-LXXXVIII)$$

$$H_G^k = H_m^k + \frac{(H_{m+1}^k - H_m^k)}{(\Delta x)} (x_G - x_m) \quad (3-LXXXIX)$$

Obtenidas las velocidades y los tirantes en E y G, las ecuaciones

$d(U \pm 2\sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt$ se integran en las direcciones ξ y η ,

las que parten de los puntos E y G respectivamente:

$$U_i^{k+1} + 2\sqrt{gH_i^{k+1}} = U_E^k + 2\sqrt{gH_E^k} + gS_o(\Delta t) - g \int_{t^k}^{t^{k+1}} S_f dt \quad (3-XC)$$

si (Δt) es pequeño (Ref. 4):

$$\int_{t^k}^{t^{k+1}} S_f dt = \frac{S_{fE} + S_{fp}}{2} (\Delta t)$$

donde S_f puede aproximarse utilizando la fórmula de Manning (Ref. 4):

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} \quad \therefore \quad S_f = \frac{n^2 U^2}{(R)^{4/3}}$$

En diferencias finitas se puede utilizar el siguiente esquema:

$$S_{f_p} = \frac{|U_i^k| U_i^{k+1}}{(R_i^k)^{4/3}} n^2 \quad \text{y} \quad S_{f_E} = \frac{|U_E^k| U_E^k}{(R_E^k)^{4/3}} n^2 \quad (3-XCI)$$

donde

n , es el coeficiente de rugosidad de Manning en la sección analizada.

R , es el radio hidráulico en la sección correspondiente.

S_f , es la pendiente hidráulica.

El esquema utilizado permite conservar la linealidad en la ecuación (3-XC).

El hecho de calcular U^2 mediante el producto de un valor absoluto de la velocidad, $|U|$, y una velocidad con su signo correspondiente, U , se debe a que al elevar al cuadrado U , siempre resultaría positivo y se perdería el sentido real de la velocidad del flujo:

Substituyendo (3-XCI) en (3-XC):

$$U_i^{k+1} + 2\sqrt{gH_i^{k+1}} = U_E^k + 2\sqrt{gH_E^k} + gS_o(\Delta t) - \frac{g(\Delta t)}{2} \left[\frac{|U_i^k| U_i^{k+1}}{(R_i^k)^{4/3}} n_i^2 + \frac{|U_E^k| U_E^k}{(R_E^k)^{4/3}} n_E^2 \right]$$

(3-XCII)

Procediendo igual con la ecuación $d(U - 2\sqrt{gH}) = g(S_o - S_f) dt$,

$$U_i^{k+1} - 2\sqrt{gH_i^{k+1}} = U_G^k - 2\sqrt{gH_E^k} + gS_o(\Delta t) - \frac{g(\Delta t)}{2} \left[\frac{|U_i^k|U_i^{k+1}}{(R_i^k)^{4/3}} n^2 + \frac{|U_G^k|U_G^k}{(R_G^k)^{4/3}} n^2 \right]$$

(3-XCIII)

Sumando las ecuaciones (3-XCII) y (XCIII),

$$2U_i^{k+1} = (U_E^k + U_G^k) + 2(\sqrt{gH_E^k} - \sqrt{gH_G^k}) + 2gS_o(\Delta t) - g(n_i)^2(\Delta t) \left[\frac{|U_i^k|U_i^{k+1}}{(R_i^k)^{4/3}} \right] - \frac{g(\Delta t)}{2} \left[\frac{|U_E^k|U_E^k}{(R_E^k)^{4/3}} (n_E)^2 + \frac{|U_G^k|U_G^k}{(R_G^k)^{4/3}} (n_G)^2 \right]$$

(3-XCIV)

$$\therefore U_i^{k+1} = \frac{\left(\frac{U_E^k + U_G^k}{2} \right) + \sqrt{gH_E^k} - \sqrt{gH_G^k} + gS_o(\Delta t) - \frac{g(\Delta t)}{4} \left[\frac{|U_E^k|U_E^k(n_E)^2}{(R_E^k)^{4/3}} + \frac{|U_G^k|U_G^k(n_G)^2}{(R_G^k)^{4/3}} \right]}{1 + \frac{g(n_i)^2(\Delta t)}{2} \left(\frac{|U_i^k|}{(R_i^k)^{4/3}} \right)}$$

(3-XCV)

Con el valor calculado de U_i^{k+1} , despejando H_i^{k+1} de (3-XCII)

$$H_i^{k+1} = \frac{U_E^k - U_i^{k+1}}{2\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{g} S_o(\Delta t) - \sqrt{g}(\Delta t)}{4} \left(\frac{|U_i^{k+1}|U_i^{k+1}(n_i)^2}{(R_i^k)^{4/3}} + \frac{|U_E^k|U_E^k(n_E)^2}{(R_E^k)^{4/3}} \right)$$

Las restricciones a que obliga la hipótesis a), pueden disminuirse si con base en los valores obtenidos de H_i^{k+1} y U_i^{k+1} se calculan nuevamente ξ_p y η_p , y con el mismo procedimiento seguido para estimar H_i^{k+1} y U_i^{k+1} , se obtiene una segunda aproximación de H_i^{k+1} y U_i^{k+1} .

El procedimiento descrito se aplica a todos los puntos localizados en la malla del plano $x-t$ comprendidos entre (Δx) y $(\lambda-1)(\Delta x)$; esto es, para $(\Delta x) \leq x \leq (\lambda-1)(\Delta x)$, si λ es la sección final o de descarga del canal.

Para los puntos $x_i = 0$ y $x_i = \lambda(\Delta x)$, fronteras del flujo, se hacen las siguientes consideraciones:

CONDICIONES DE FRONTERA

Las dos ecuaciones diferenciales parciales del flujo transitorio (3-XXXIX y 3-LI), requieren de dos condiciones de frontera independientes que relacionen la velocidad y el tirante en ciertas secciones del canal. Una de esas condiciones es el hidrograma o relación descargas-tiempo en la frontera aguas arriba (sección de entrada del canal, $x=0$).

La otra condición de frontera es la relación descargas-tirante en la sección de salida o descarga del cauce. Generalmente se trata de una estructura de control con una relación definida entre tirantes y gastos, o con un tirante constante como en el caso de descargar a un depósito muy grande o un tirante crítico cuando el flujo aguas arriba sea subcrítico y

la descarga sea libre.

En el caso que se estudia, la frontera aguas arriba está definida por los hidrogramas producidos en las áreas tributarias de cada elemento, o se trata de hidrogramas obtenidos en la descarga de elementos antecesores (en ambos casos se tiene $Q = Q(t)$). Utilizando las hipótesis previamente discutidas y la característica η en el origen, se integra la ecuación $d(U - 2\sqrt{gH}) = g(S_0 - S_f)dt$, obteniéndose mediante tanteos el valor de H_0^{k+1} , con el cual se calcula U_0^{k+1} .

En la frontera de aguas abajo, dependiendo de que condición se tenga (tirante constante, tirante crítico, etc.), se utiliza la ecuación característica ξ y la ecuación (3-XCII) para estimar U_λ^{k+1} .

Los procedimientos de cálculo descritos se realizan para cada intervalo de tiempo, obteniéndose con esto el hidrograma de descarga del elemento analizado, y la historia del flujo en el tiempo a lo largo de todo el elemento.

3.3.3.4 Un método aproximado (Método de Muskingum)

El método fue desarrollado, entre otros, por G. T. Mc Carthy en combinación con los estudios del Muskingum Conservancy District Flood Control Project del U. S. Army Corps of Engineers en 1934-1935 (Referencias 5 y 14). Utiliza como ecuaciones básicas, la de continuidad y una relación gastos-almacenamientos entre dos secciones de un volumen de con-

trol.

En un cauce unidimensional, con flujo incompresible, la ecuación diferencial parcial de continuidad es:

$$\frac{\partial(UA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3-XXXIX b)$$

El gasto Q que atraviesa una sección del volumen de control (fig. 3-33) es:

$$Q = UA \quad \therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial UA}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3-XCVI)$$

expresada en diferencias finitas:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} + \frac{\Delta A}{\Delta t} = 0 \quad \therefore (\Delta Q) + \frac{(\Delta A)(\Delta x)}{(\Delta t)} = 0 \quad (3-XCVIII)$$

pero $(\Delta A)(\Delta x) = (\Delta v)$, donde (Δv) es la variación del volumen contenido en el volumen de control, y $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ es la variación que sufre el volumen almacenado a través del tiempo. (ΔQ) es la diferencia de gastos entre una sección transversal y otra. $(\Delta Q) = O - I$, siendo O el gasto que egresa del volumen de control, e I el gasto que ingresa (fig. 3-33). Estos gastos pueden aproximarse con la relación $Q = aH^n$ (Ref. 4), por lo tanto,

$$I = a (H_R)^n \quad (3-XCVIIIa)$$

$$O = a (H_R)^n \quad (3\text{-XCVIIIb})$$

ecuaciones en las que H_R y H_B son los tirantes instantáneos en las secciones aguas arriba y aguas abajo respectivamente.

Si el volumen instantáneo contenido dentro del elemento de control se estima con la función

$$V = xb(H_R)^m + (1-x)b(H_B)^m \quad (3\text{-XCIX})$$

(Ref. 5), al despejar H_R y H_B de las ecuaciones (3-XCVIII) y substituirlos en (3-XCIX), se obtiene:

$$v = xb \left(\frac{I}{a}\right)^{m/n} + (1-x)b \left(\frac{O}{a}\right)^{m/n}$$

en la que haciendo $k = \frac{b}{a^{m/n}}$ y $r = m/n$ resulta:

$$v = xkI^r + (1-x)kO^r = (xI^r + (1-x)O^r)k \quad (3\text{-C})$$

Esta ecuación evalúa el volumen almacenado en el cauce cuando el flujo es uniforme con gasto O (fig. 3-33, prisma almacenado), más una cuña almacenada debida a la diferencia de tirantes en las secciones del cauce al discrepar los gastos de entrada y salida (figura 3-33, cuña adicional almacenada). Si en ella, ecuación (3-C), la potencia r es uno, se define una relación lineal entre los almacenamientos y los ingresos y egresos del fluido contenido en el volumen de control:

$$v = k [xI + (1-x)O] \quad (3\text{-XCI})$$

la cual, si se substituye en (3-XCVII) se obtiene:

$$O - I = - \frac{\delta}{\delta t} (*) \quad \therefore I - O = \frac{\delta}{\delta t} (*)$$

$$\therefore I - O = \frac{\delta}{\delta t} \left\{ k \left[xI + (1-x)O \right] \right\}$$

Desarrollando la derivada en el tiempo y suponiendo que los valores de

k y x son constantes,

$$I - O = kx \frac{\delta I}{\delta t} + k(1-x) \frac{\delta O}{\delta t}$$

expresada ahora en diferencias finitas:

$$\frac{I^k + I^{k+1}}{2} - \frac{O^k + O^{k+1}}{2} = kx \frac{I^{k+1} - I^k}{(\Delta t)} + k(1-x) \frac{O^{k+1} - O^k}{(\Delta t)}$$

Despejando a O^{k+1} ,

$$O^{k+1} = \frac{2kx + (\Delta t)}{2k(1-x) + (\Delta t)} I^k + \frac{(\Delta t) - 2kx}{2k(1-x) + (\Delta t)} I^{k+1} + \frac{2k(1-x) - (\Delta t)}{2k(1-x) + (\Delta t)} O^k$$

haciendo

$$C'_1 = \frac{kx + \frac{(\Delta t)}{2}}{k(1-x) + \frac{(\Delta t)}{2}}$$

$$C'_2 = \frac{\frac{(\Delta t)}{2} - kx}{k(1-x) + \frac{(\Delta t)}{2}}$$

$$C'_3 = \frac{k(1-x) - \frac{(\Delta t)}{2}}{k(1-x) + \frac{(\Delta t)}{2}}$$

se tiene:

$$O^{k+1} = C_1' I^k + C_2' I^{k+1} + C_3' O^k \quad (3-CII)$$

la cual es conocida como ecuación de Muskingum; válida para un tramo de cauce sin aportaciones laterales. Para simplificar los cálculos, haciendo transformaciones algebraicas, a partir de (3-CII) se puede llegar a:

$$O^{k+1} = O^k + C_1 (I^k - O^k) + C_2 (I^{k+1} - I^k)$$

donde

$$C_1 = \frac{(\Delta t)}{k(1-x) + \frac{(\Delta t)}{2}} \quad ; \quad C_2 = \frac{\frac{(\Delta t)}{2} - kx}{k(1-x) + \frac{(\Delta t)}{2}}$$

Para mecanizar el cálculo del tránsito de la avenida, se sugieren los siguientes pasos:

- a) Calcular $(I^{k+1} - I^k)$
- b) Obtener el valor de $C_2 (I^{k+1} - I^k)$
- c) Hacer el cálculo de $(I^k - O^k)$
- d) Determinar $C_1 (I^k - O^k)$
- e) Sumar los valores obtenidos en los pasos b) y d)
- f) Realizando la suma del resultado en el inciso c) más O^k , se determi-

na O^{k+1}

g) Repitiendo los pasos del a) al f) utilizando el valor de O^{k+1} de la iteración anterior como O^k se va obteniendo la historia de las descargas en la sección en el tiempo.

Es recomendable utilizar como períodos para el tránsito el valor

$$2kx \leq t \leq x$$

CALIBRACION

La determinación de las constantes k y x se hace empíricamente, midiendo en el cauce analizado los gastos en la entrada y en la descarga, y realizando los siguientes cálculos:

De la ecuación (3-XCI), el volumen almacenado S es,

$$S = kxI + kO - kxO = kx(I - O) + kO$$

el incremento en ese volumen almacenado, (ΔS) , es igual a la diferencia del volumen ingresado en el intervalo de tiempo, menos el volumen que abandonó el elemento durante el mismo intervalo:

$$\Delta S = (I - O)(\Delta t) = \frac{I^k + I^{k+1}}{2}(\Delta t) - \frac{O^k + O^{k+1}}{2}(\Delta t) = S^{k+1} - S^k$$

$$\therefore \frac{I^k + I^{k+1}}{2}(\Delta t) - \frac{O^k + O^{k+1}}{2}(\Delta t) = kx(I^{k+1} - O^{k+1}) + kO^{k+1} - kx(I^k - O^k) - kO^k$$

factorizando y despejando a k ;

$$k = \frac{\frac{(\Delta t)}{2} \{ (I^{k+1} + I^k) - (O^{k+1} - O^k) \}}{x(I^{k+1} - I^k) + (1-x)(O^{k+1} - O^k)} \quad (3-CIII)$$

A partir de los valores registrados en las mediciones de gastos de ingreso y de descarga en el cauce analizado, se determinan los valores de O^k , O^{k+1} , I^k e I^{k+1} . Suponiendo valores diferentes de x y dibujando en un sistema coordinado los valores del numerador en forma acumulada (representante del incremento en el almacenamiento), contra los del denominador (equivalente a un promedio pesado del incremento en gastos), se obtienen generalmente curvas en forma de ojal (fig. 3-34), una para cada valor supuesto de x .

El valor de x que produce el ojal más cerrado, de manera que tienda a ser una recta, se acepta como el valor correcto de x , y el recíproco de la pendiente de la curva, representa el valor de k (fig. 3-34).

Los procedimientos hasta aquí expuestos para este método, no contemplan entradas laterales a lo largo de los volúmenes de control, pero en caso de tenerlas, en la referencia 3 se presenta un método sencillo para corregir el hecho de tener aportaciones laterales.

Existen otros métodos semejantes, basados también en la ecuación de continuidad y una relación entre gastos y almacenamientos; pero todos necesitan de una calibración de las constantes o parámetros que inter-

vienen en el cálculo.

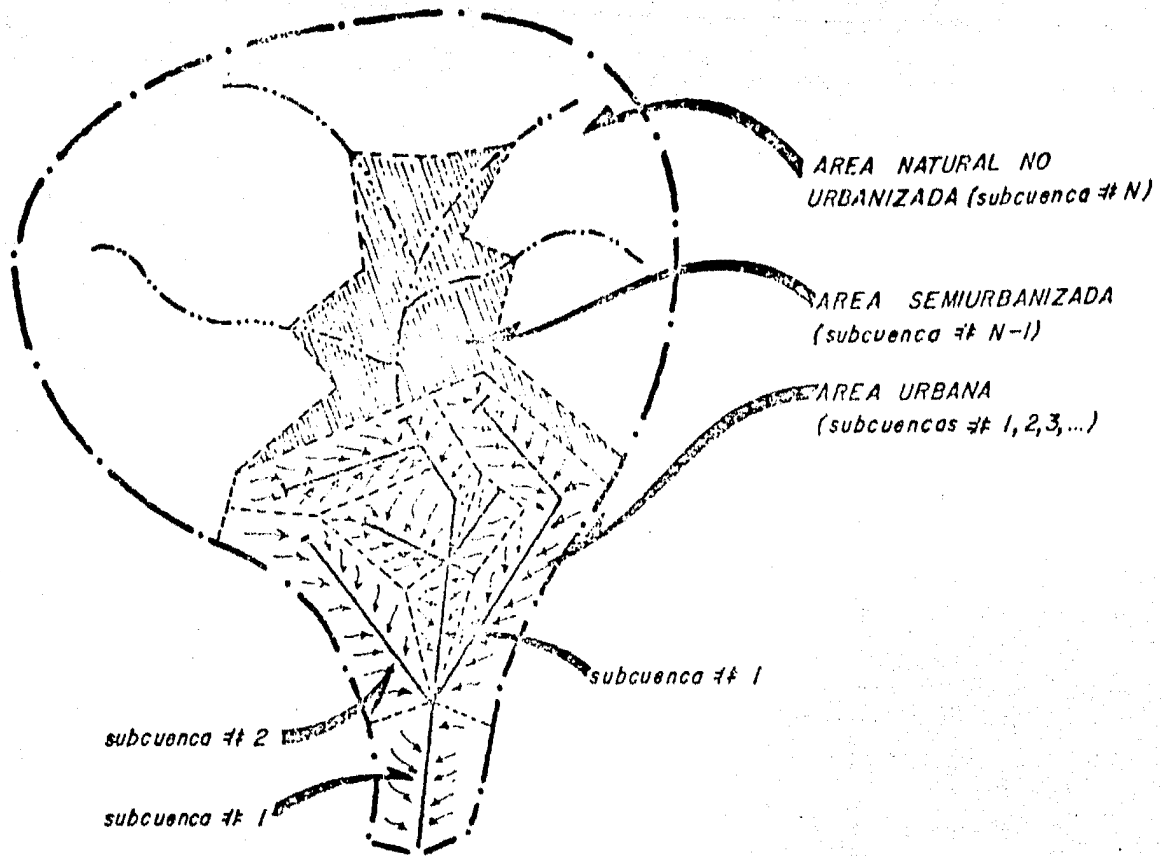


FIGURA 3-1 Subdivisión de la cuenca en varias subcuencas, para el cálculo de escurrimientos con el método "Gráfico Alemán."

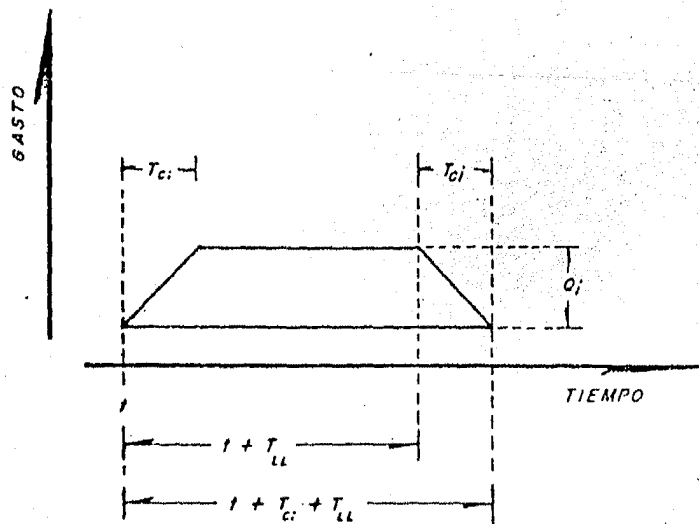


FIGURA 3-2 Hidrograma elemental del método "Gráfico Alemán"

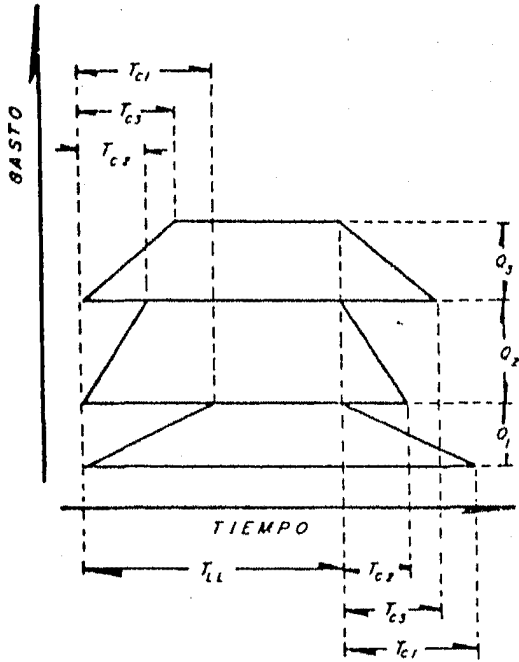
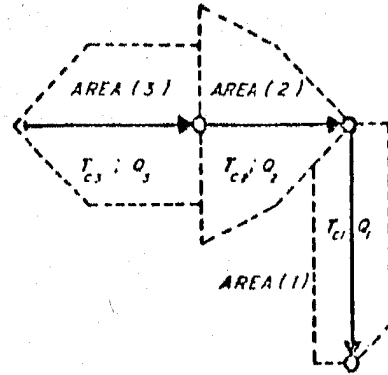
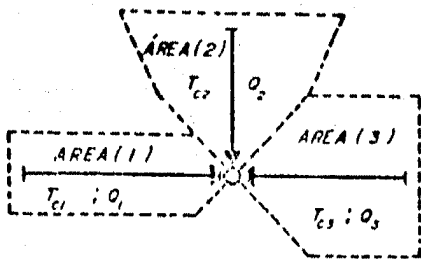


FIGURA 3-3 Procedimiento para sumar hidrogramas de colectores concurrentes, Método "Gráfico Alemán"

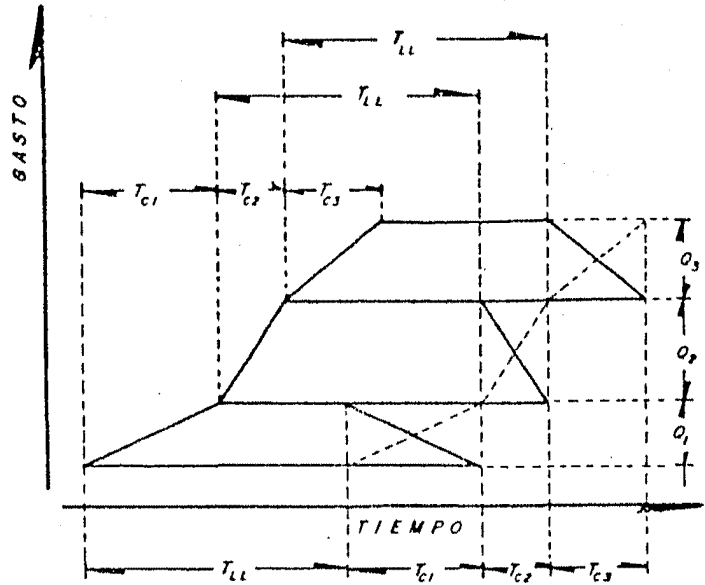
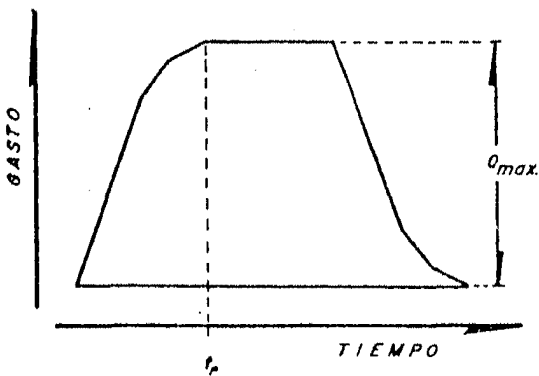
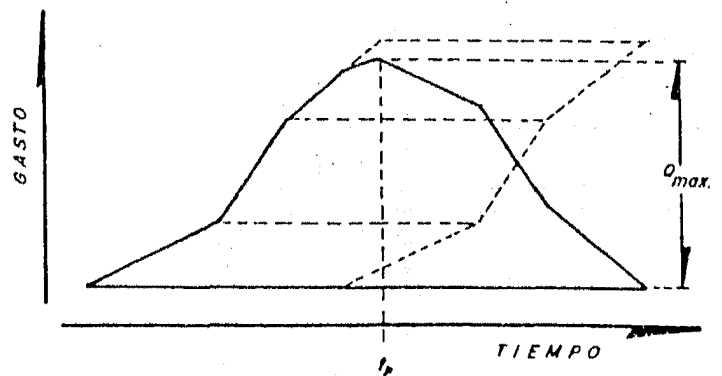


FIGURA 3-4 Procedimiento para sumar hidrogramas de colectores consecutivos, Método "Gráfico Alemán"



a) Colectores concurrentes



b) Colectores consecutivos

FIGURA 3-5 Suma de hidrogramas en el Método "Gráfico Alemán"

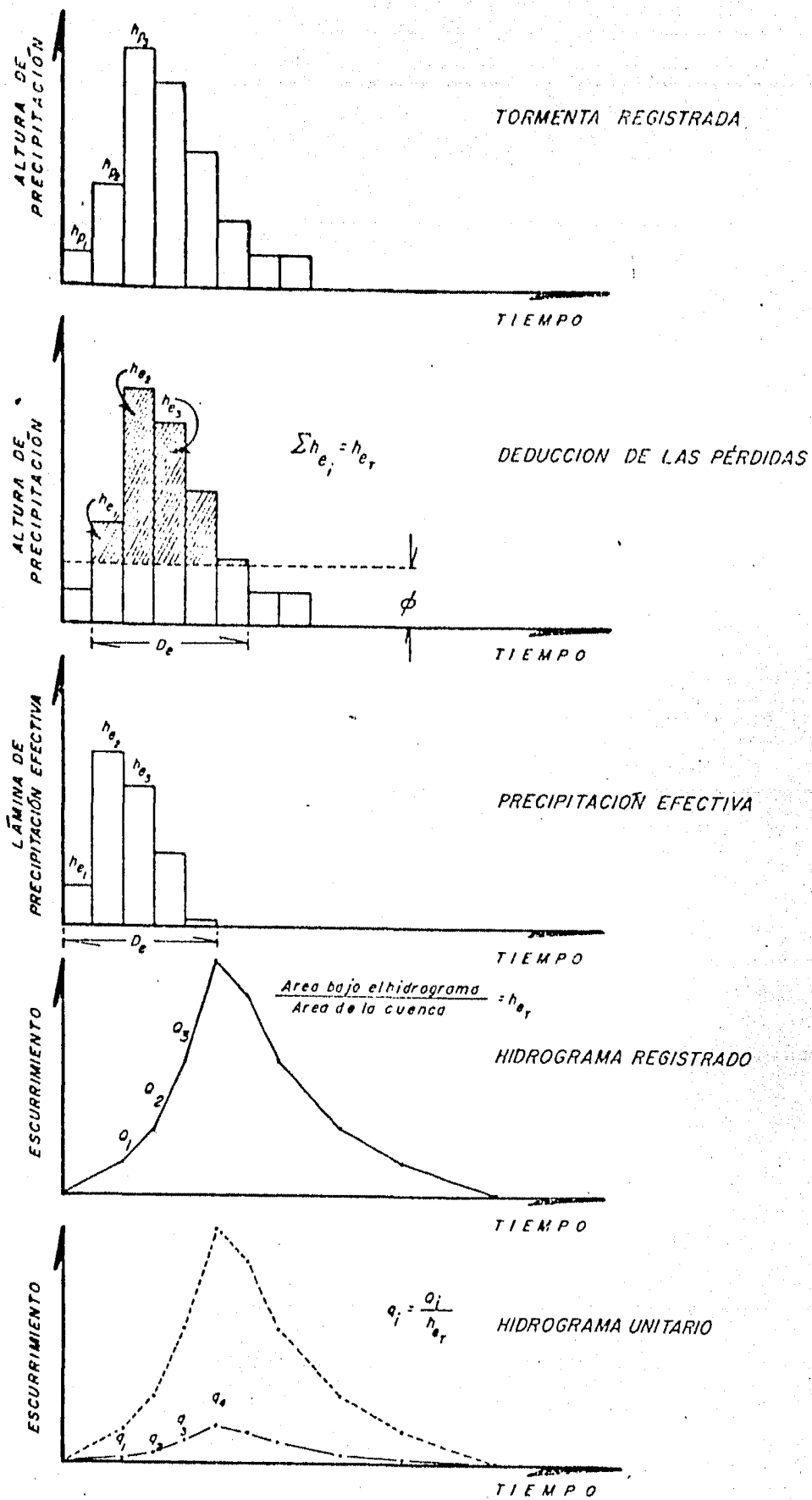


Figura 3-6 Obtencion del hidrograma unitario

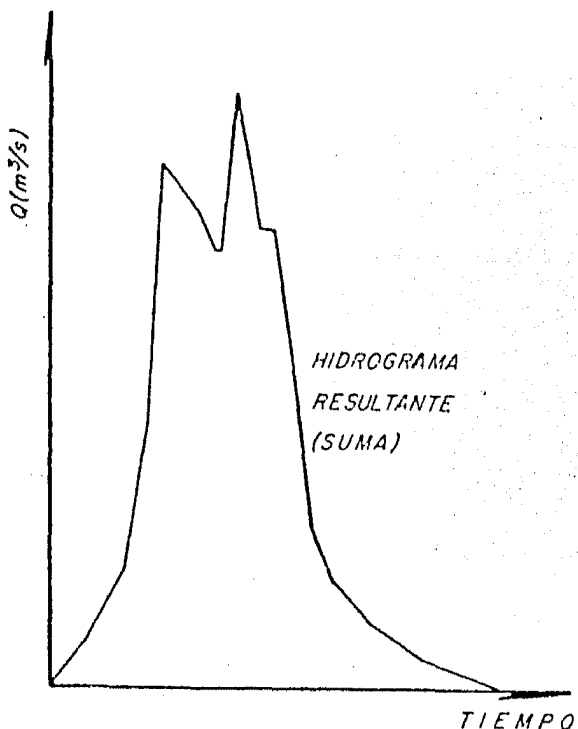
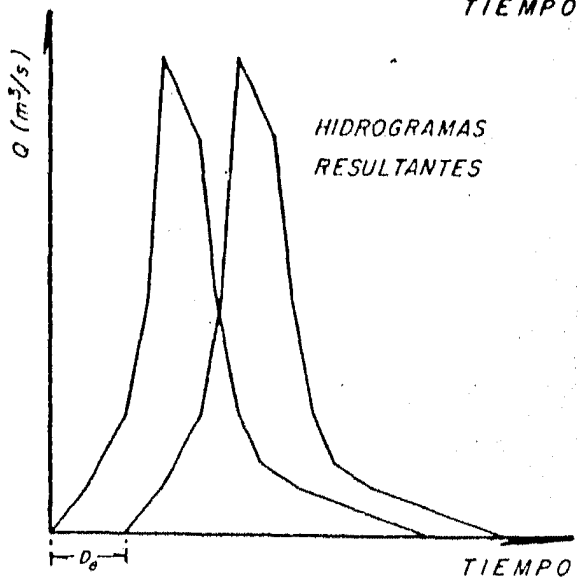
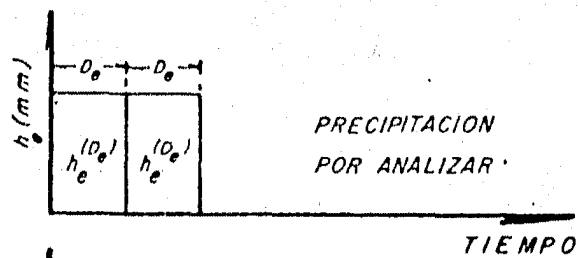
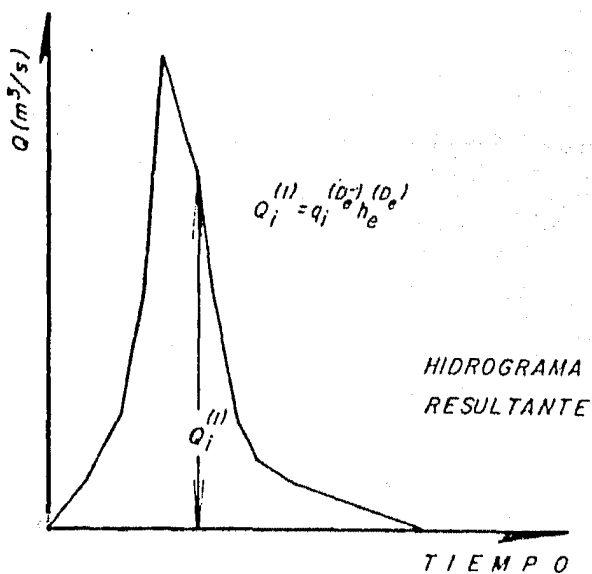
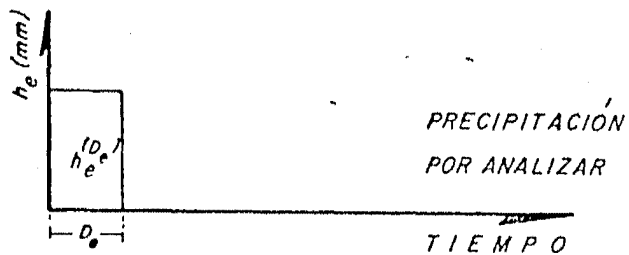
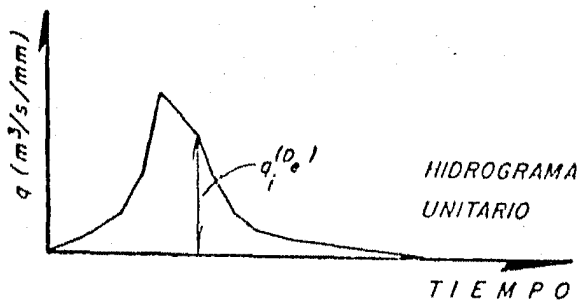
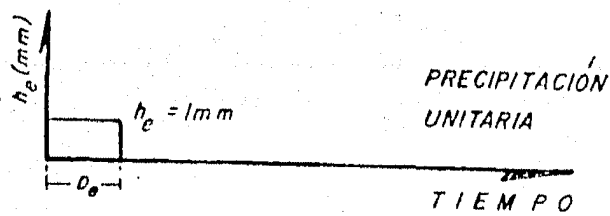


Figura 3-7 Ilustración del cálculo de un hidrograma producido por una precipitación en exceso $h_e^{(D_e)}$, calculado a partir del hidrograma unitario

Figura 3-8 Ilustración del cálculo de un hidrograma producido por una precipitación efectiva $2h_e^{(D_e)}$, $2D_e$, calculado a partir del hidrograma unitario para duraciones D_e

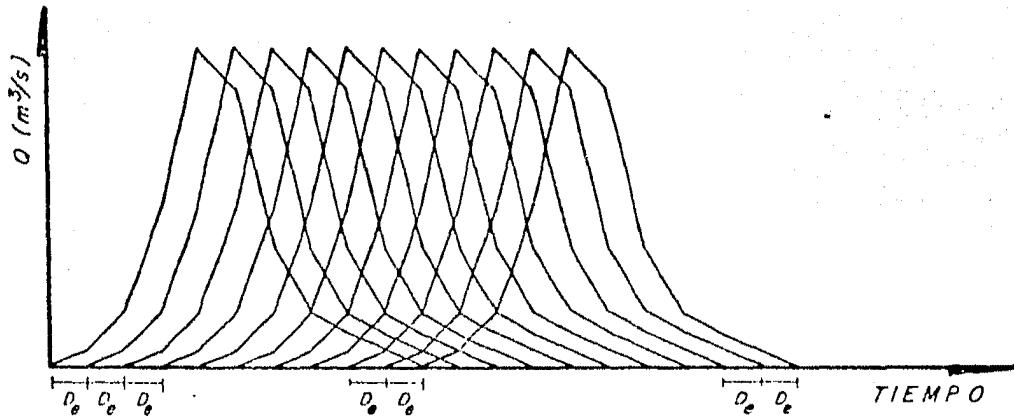
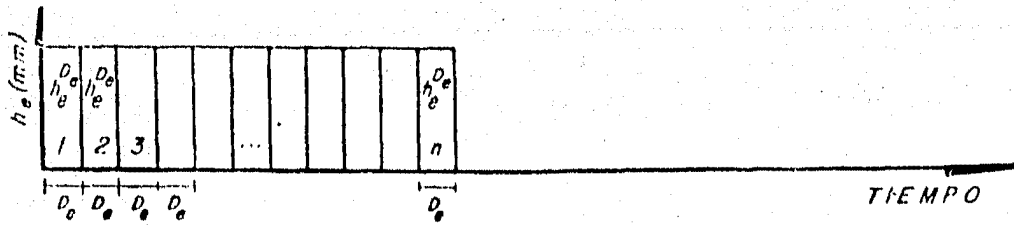


Figura 3-9 Defasamiento de los hidrogramas en el método del Hidrograma Unitario

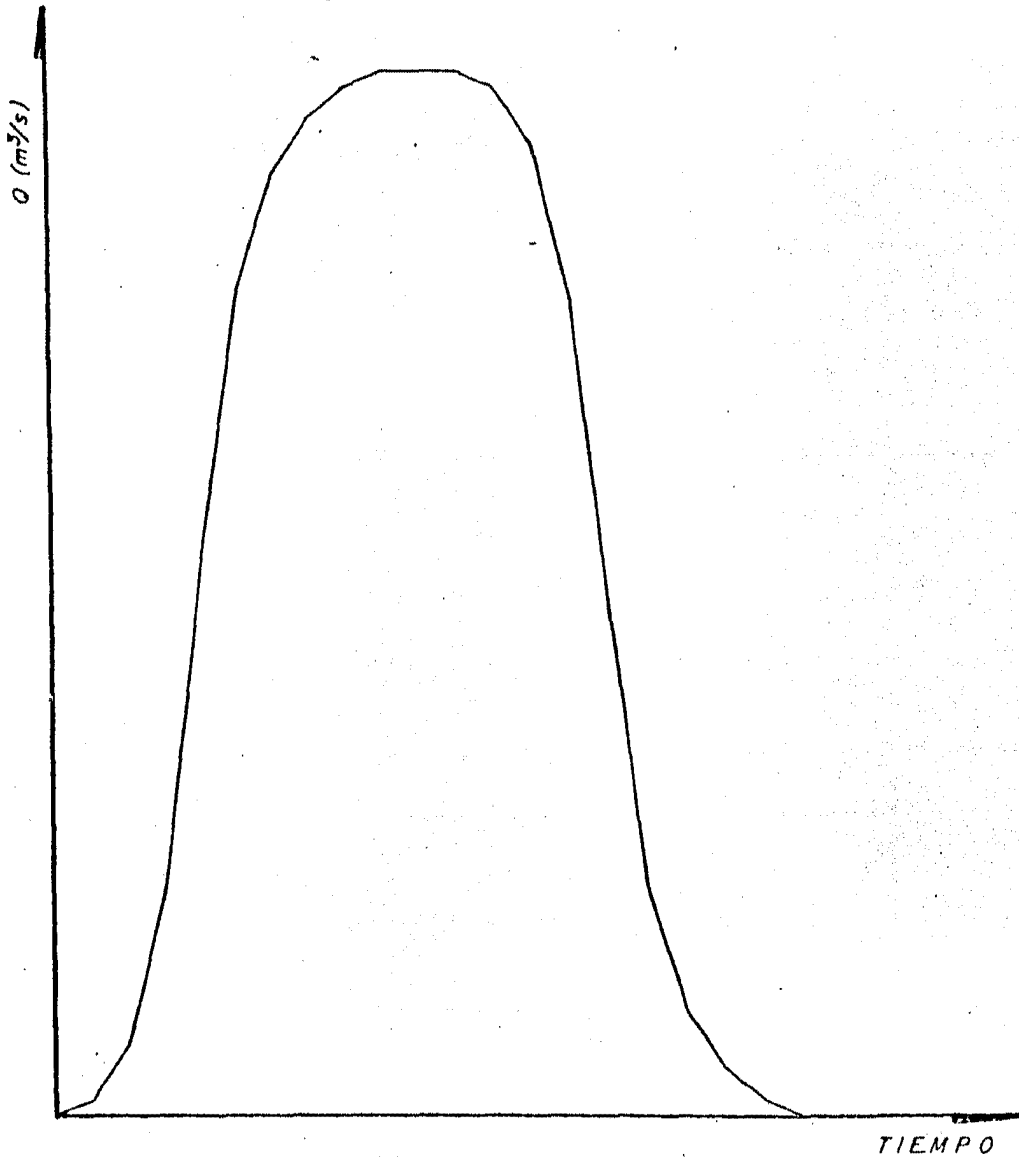


Figura 3-10 Hidrograma suma

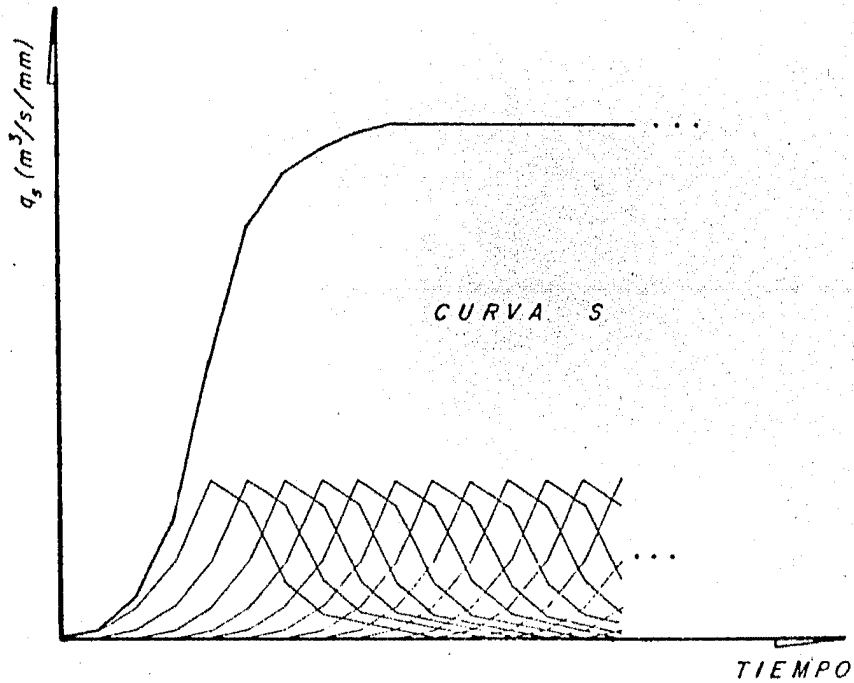
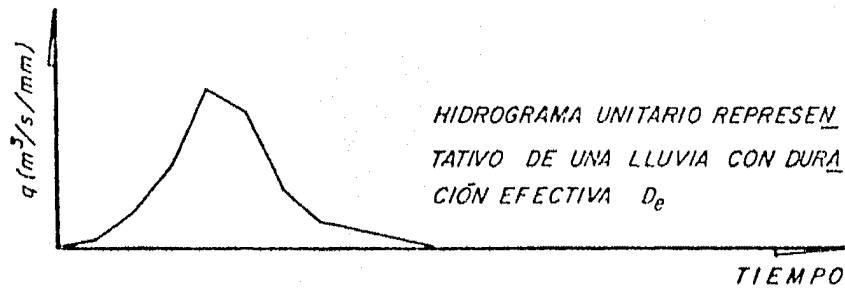
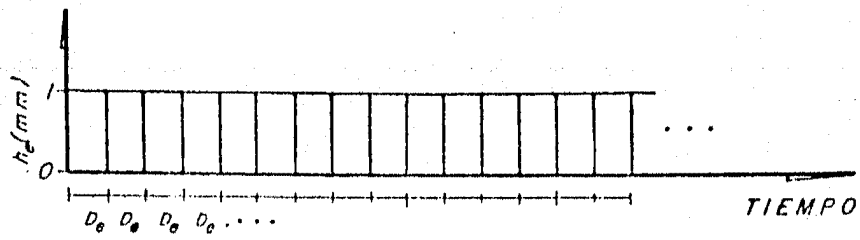


Figura 3-11 Obtención de la curva S

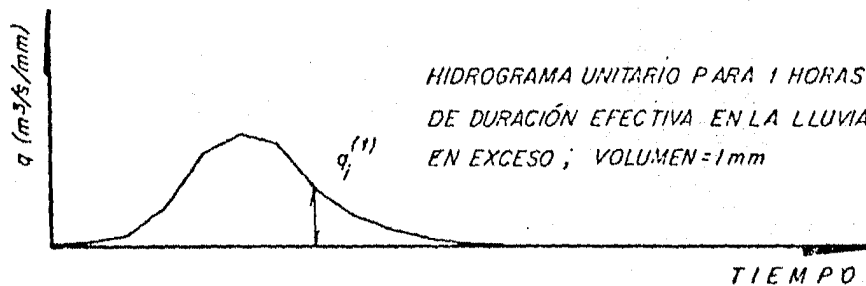
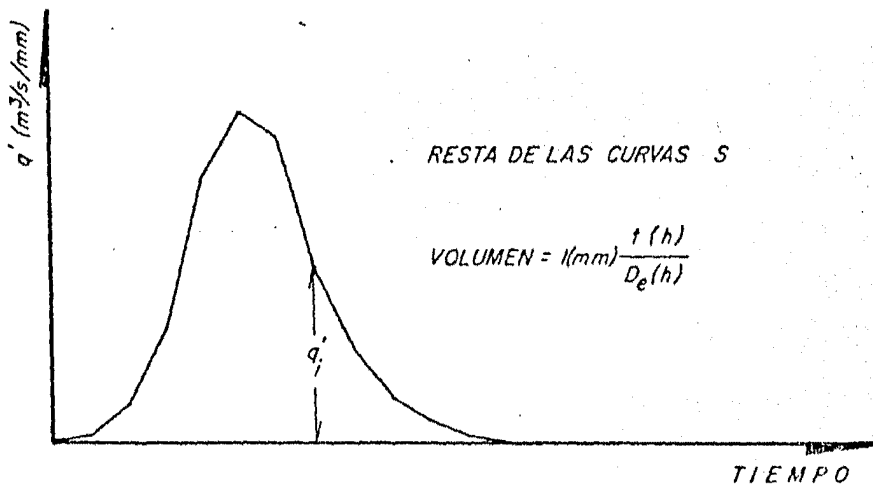
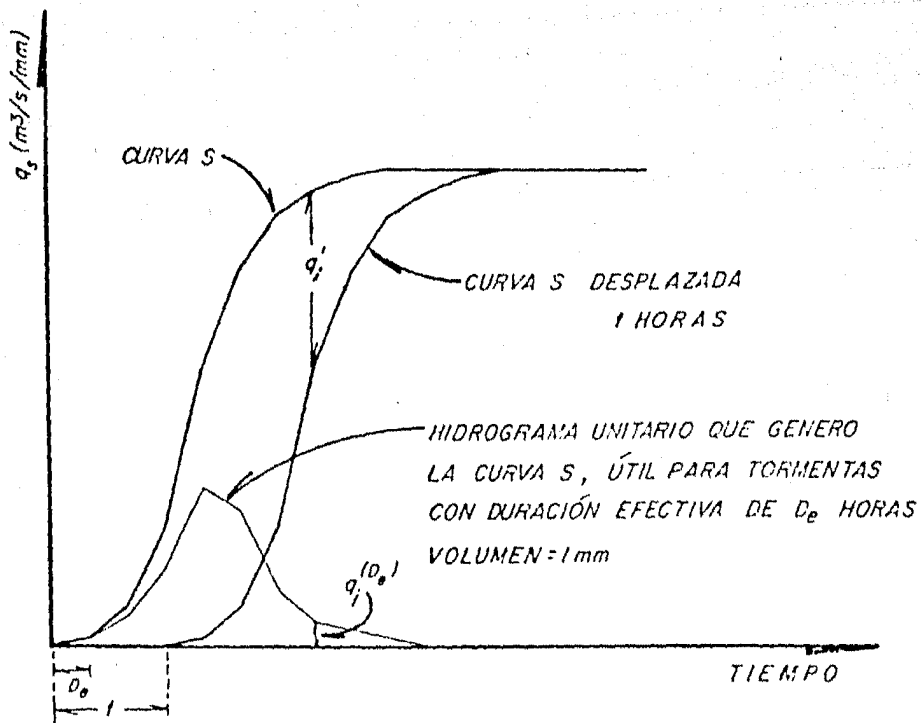


Figura 3-12 Obtención del hidrograma unitario para t horas de duración en la lluvia efectiva, par tiendo de una curva S para D_e horas

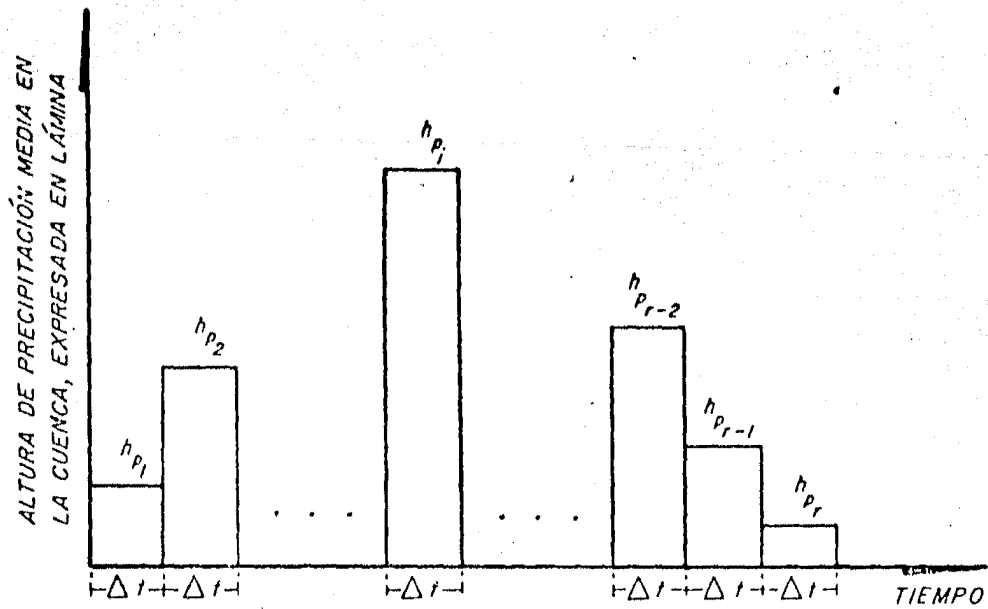


Figura 3-13 Hietograma medio de la tormenta

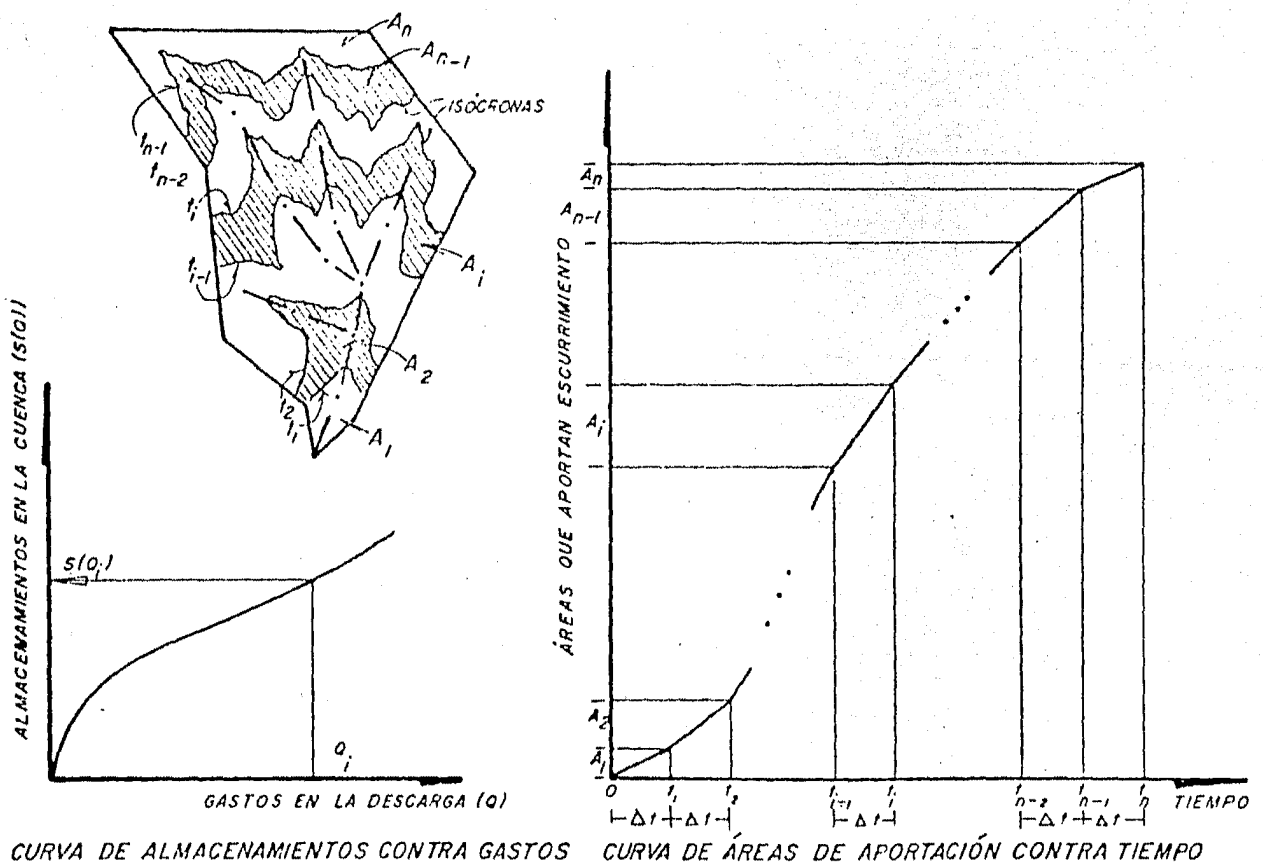


Figura 3-14 Curvas características

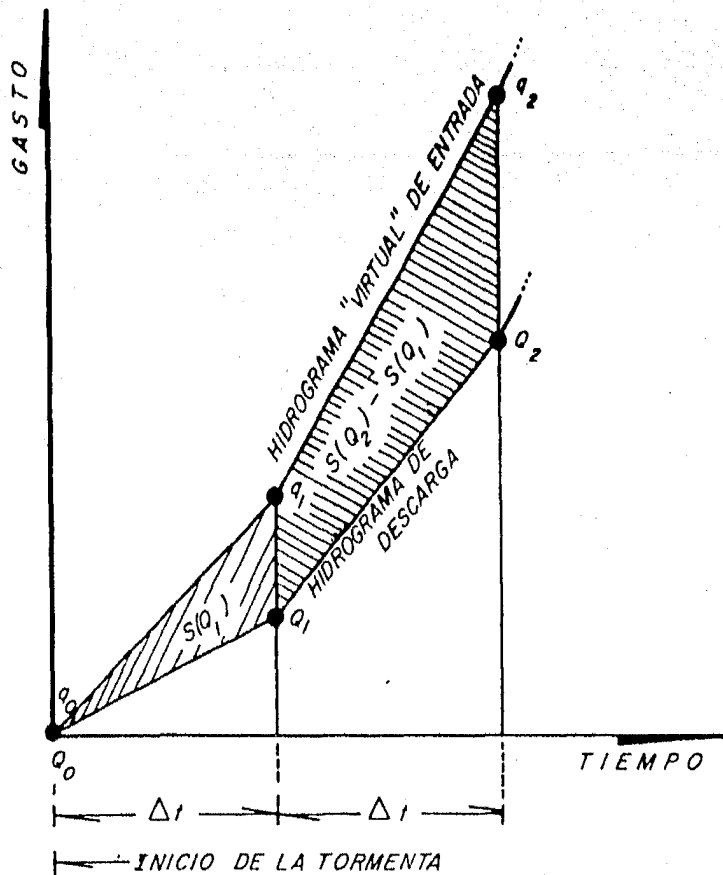


Figura 3-15

Técnica para el tránsito en el método del RRL

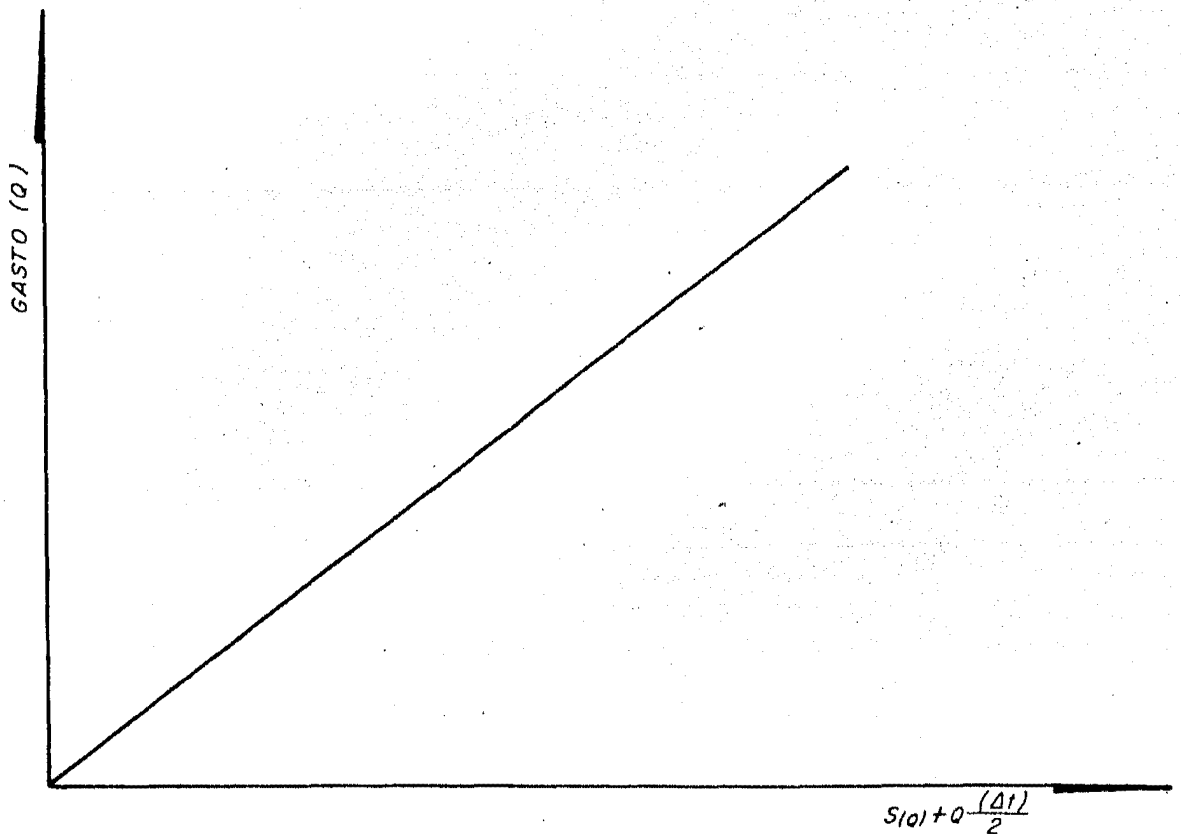


Figura 3-16 Gráfica $Q - S(Q) + Q \frac{\Delta t}{2}$, obtenida a partir de la curva Almacenamientos - Gastos de la cuenca

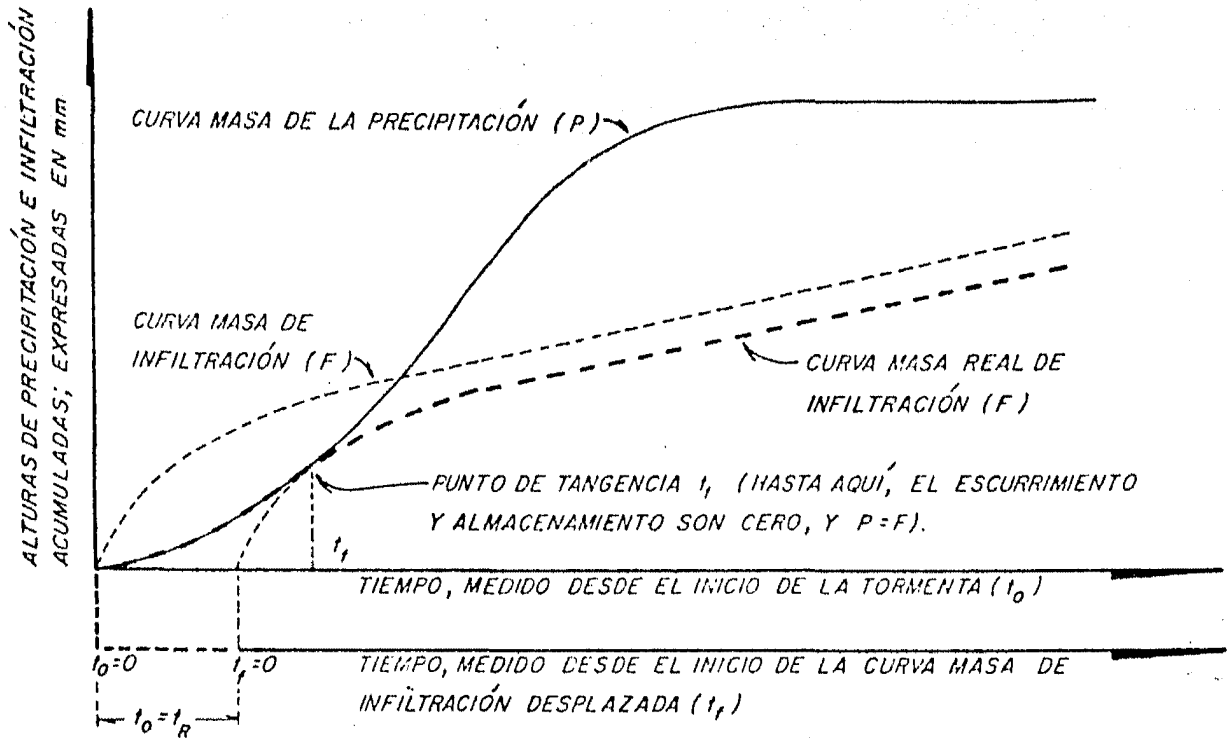


Figura 3-17 Obtención de la curva masa real de infiltración; Método del Hidrograma de Chicago

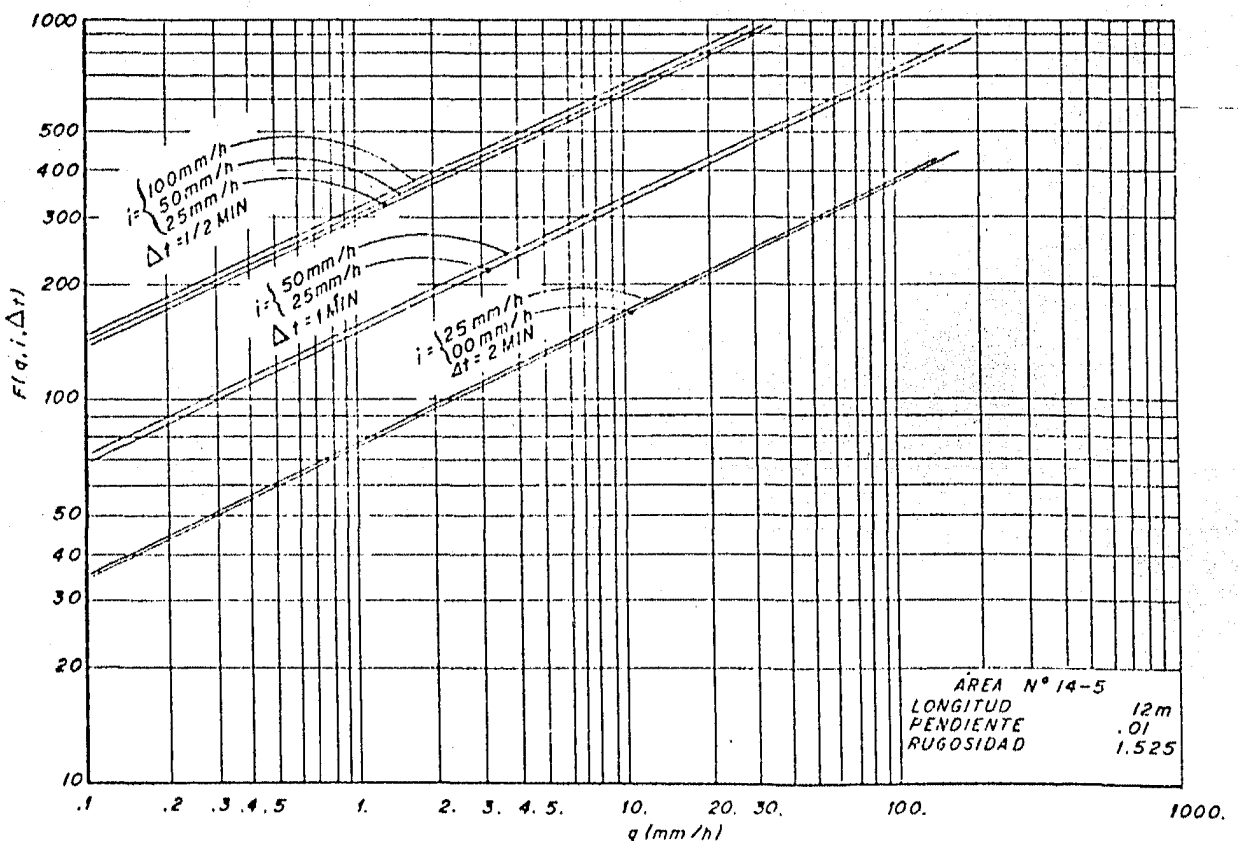


Figura 3-18 Gráfico para el tránsito en áreas elementales

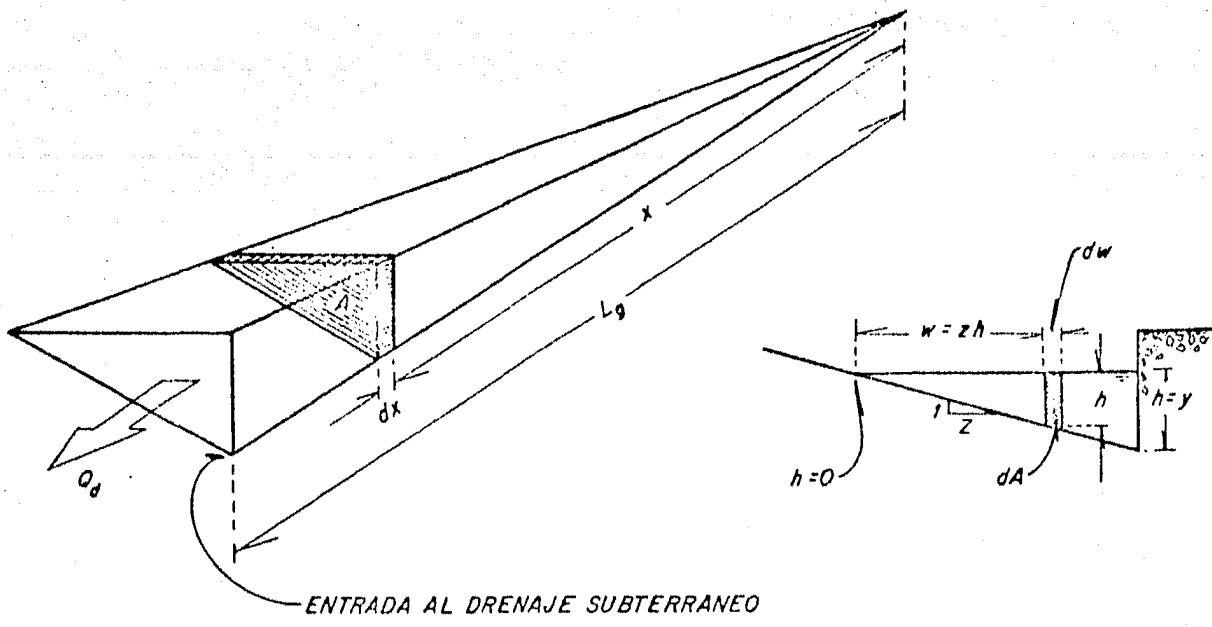


Figura 3-19 Configuración de una cuneta

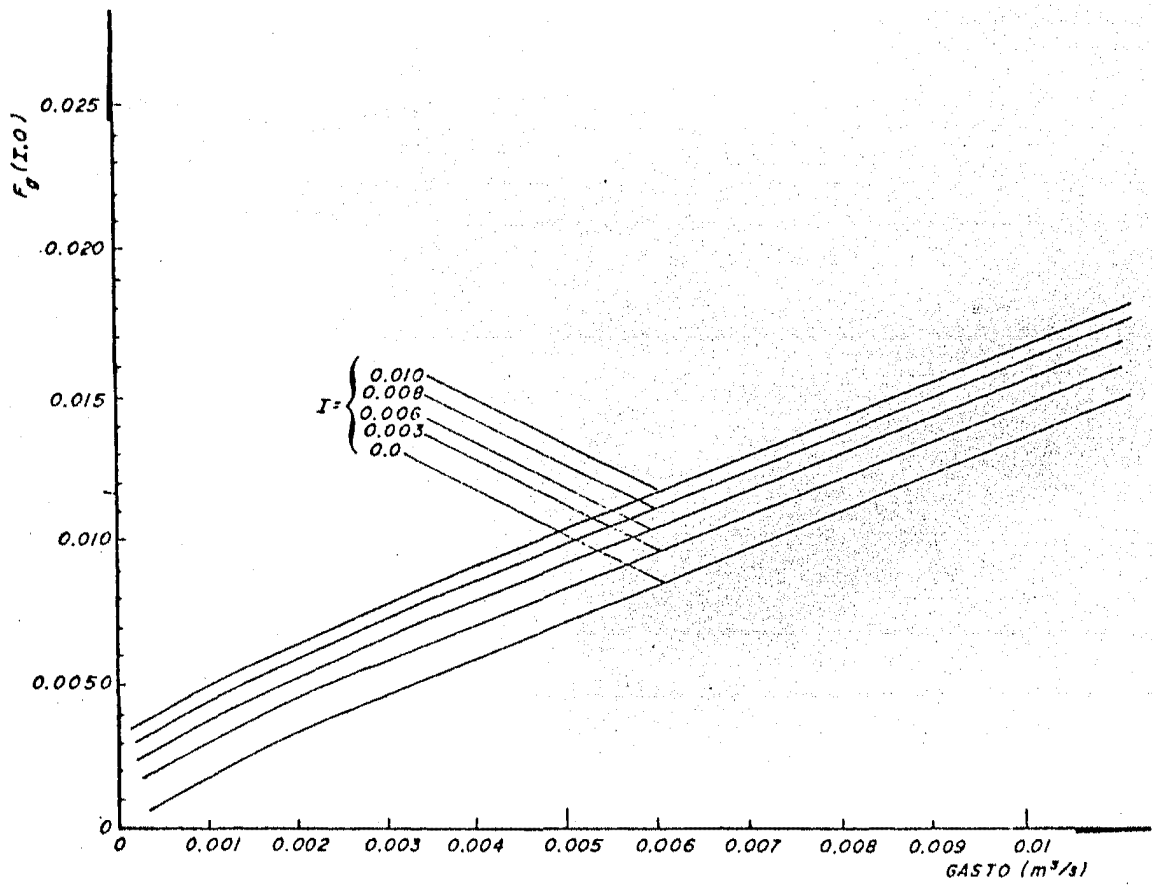


Figura 3-20 Gráfica auxiliar para el tránsito en las cunetas

V_e : VELOCIDAD MEDIA EN EL INTERCEPTOR

L_i : LONGITUD DEL i -ESIMO TRAMO DEL INTERCEPTOR

$t_i = \frac{L_i}{V_e}$: TIEMPO DE RETRAZO ENTRE EL HIDROGRAMA DE LA CUNETETA i , Y EL DE LA $(i-1)$

H_i : HIDROGRAMA DESCARGADO POR LA CUNETETA i

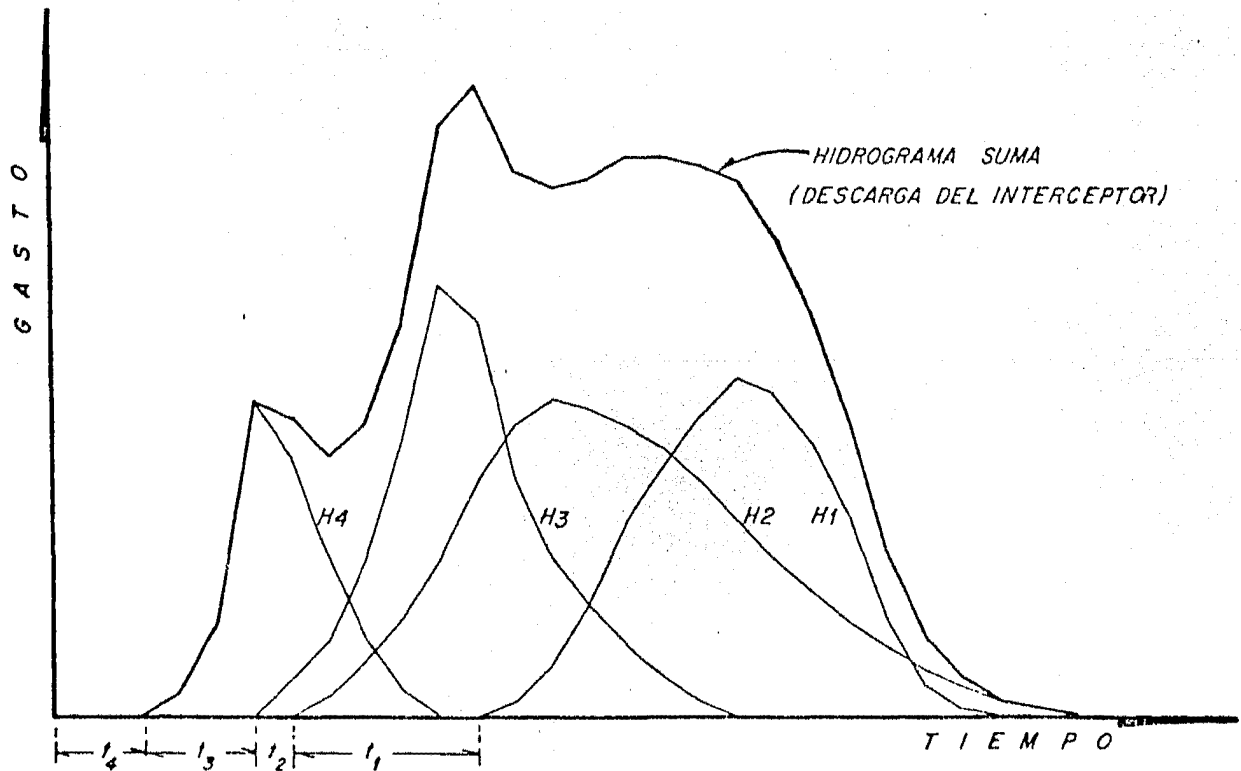
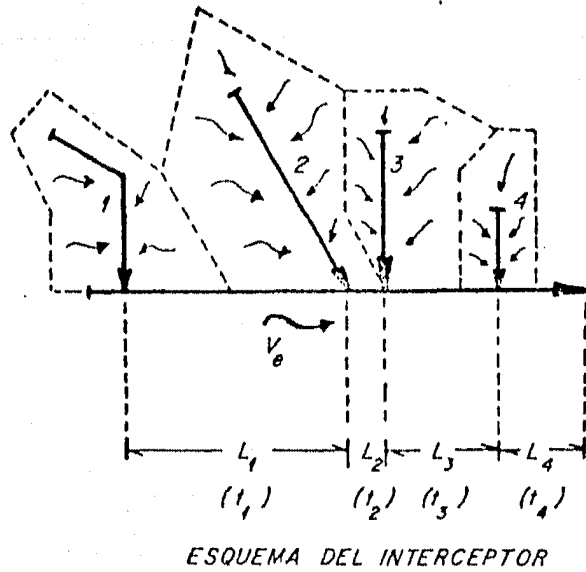


Figura 3-21 Tránsito en el interceptor

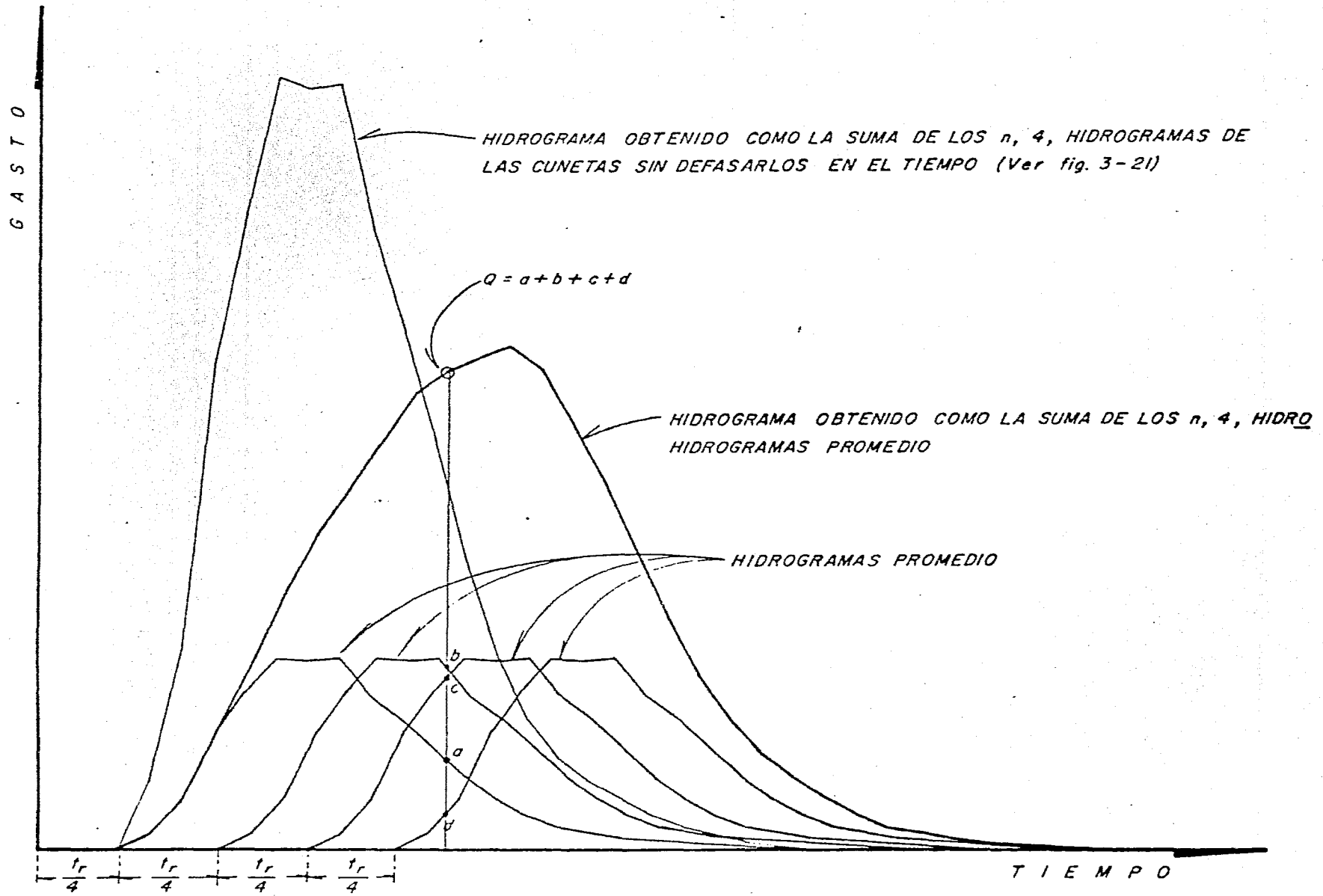
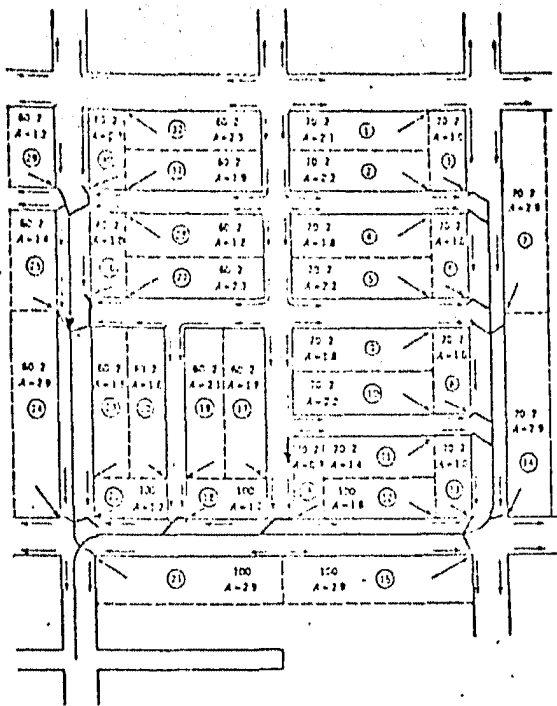
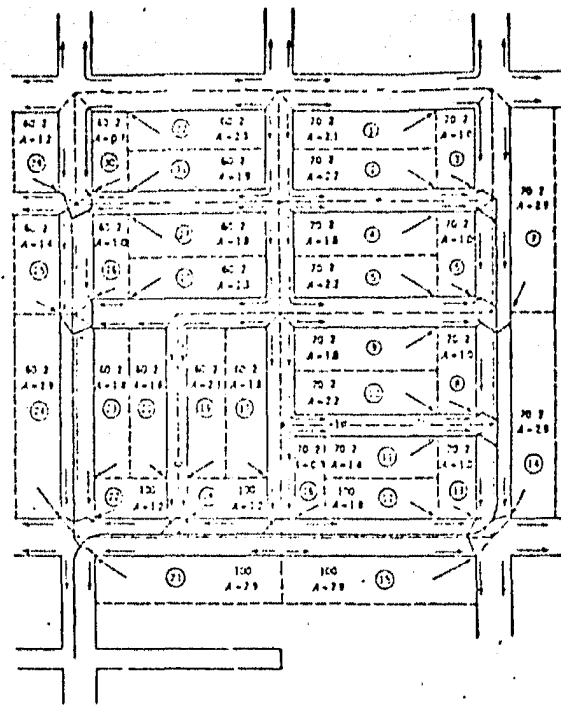


Figura 3-22 Tránsito simplificado en los interceptores



a) TRAZADO DEL SISTEMA DE DRENAJE



b) DELIMITACIÓN DE LAS ÁREAS TRIBUTARIAS

Figura 3-23 Red de drenaje

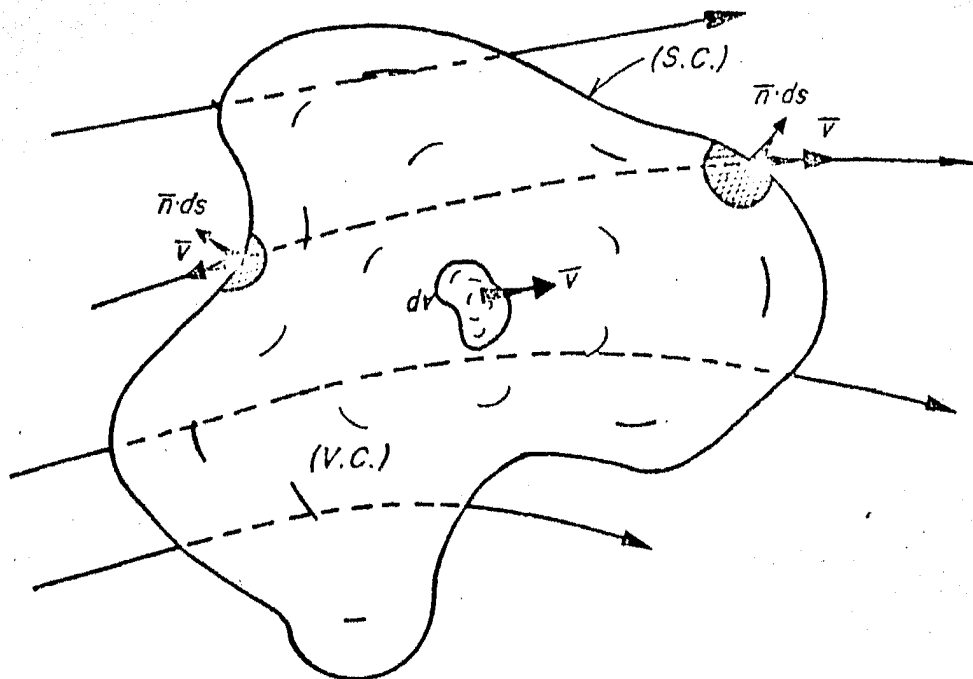


Figura 3-24 Volumen de control de un fluido en movimiento

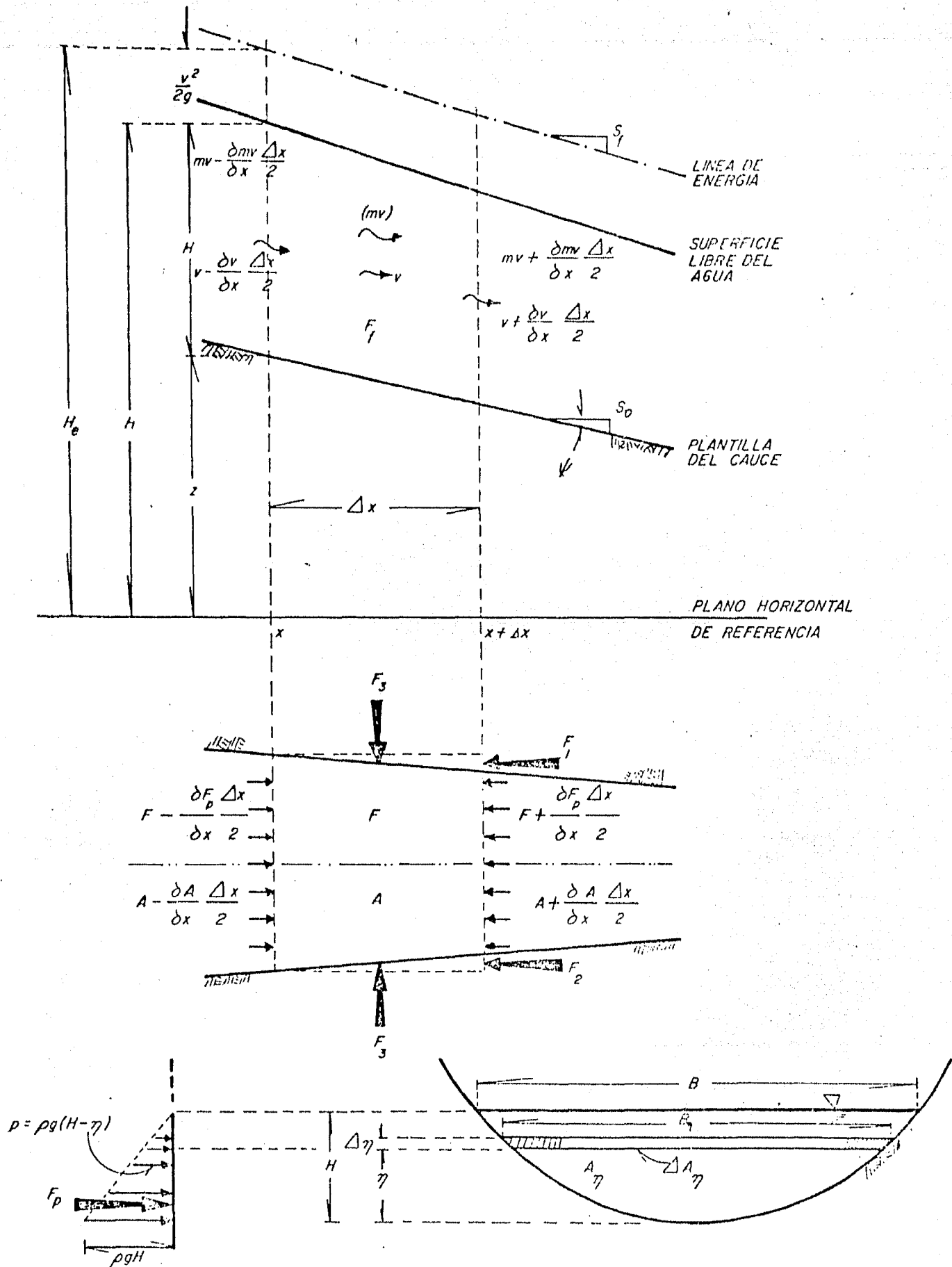


Figura 3-25 Volumen de control del cauce en estudio

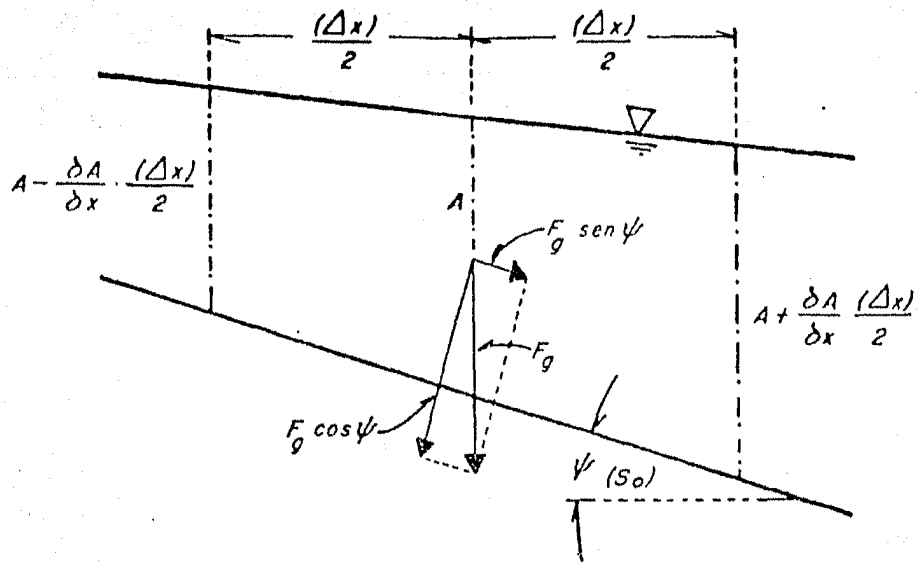


Figura 3-26 Fuerza debida al peso del fluido

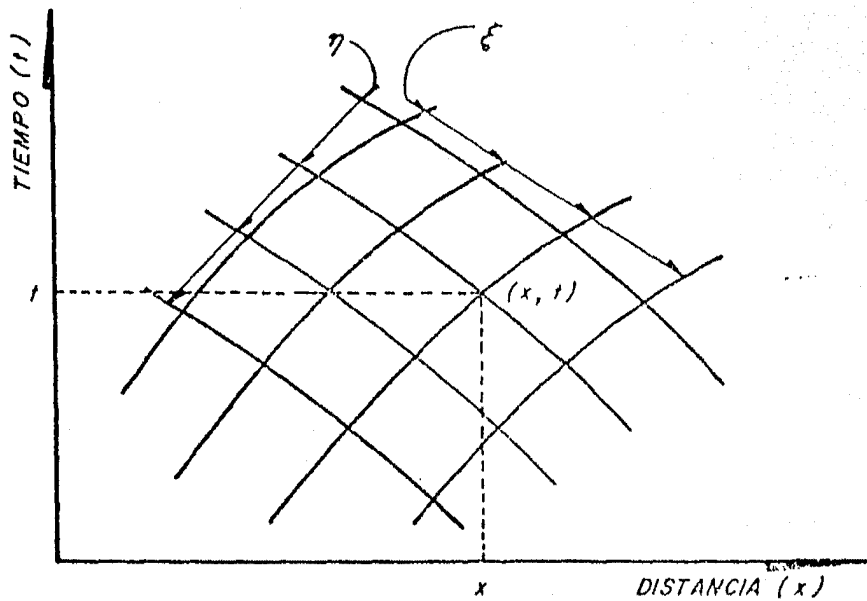


Figura 3-27 Red de curvas características ξ y η , en el plano $x-t$

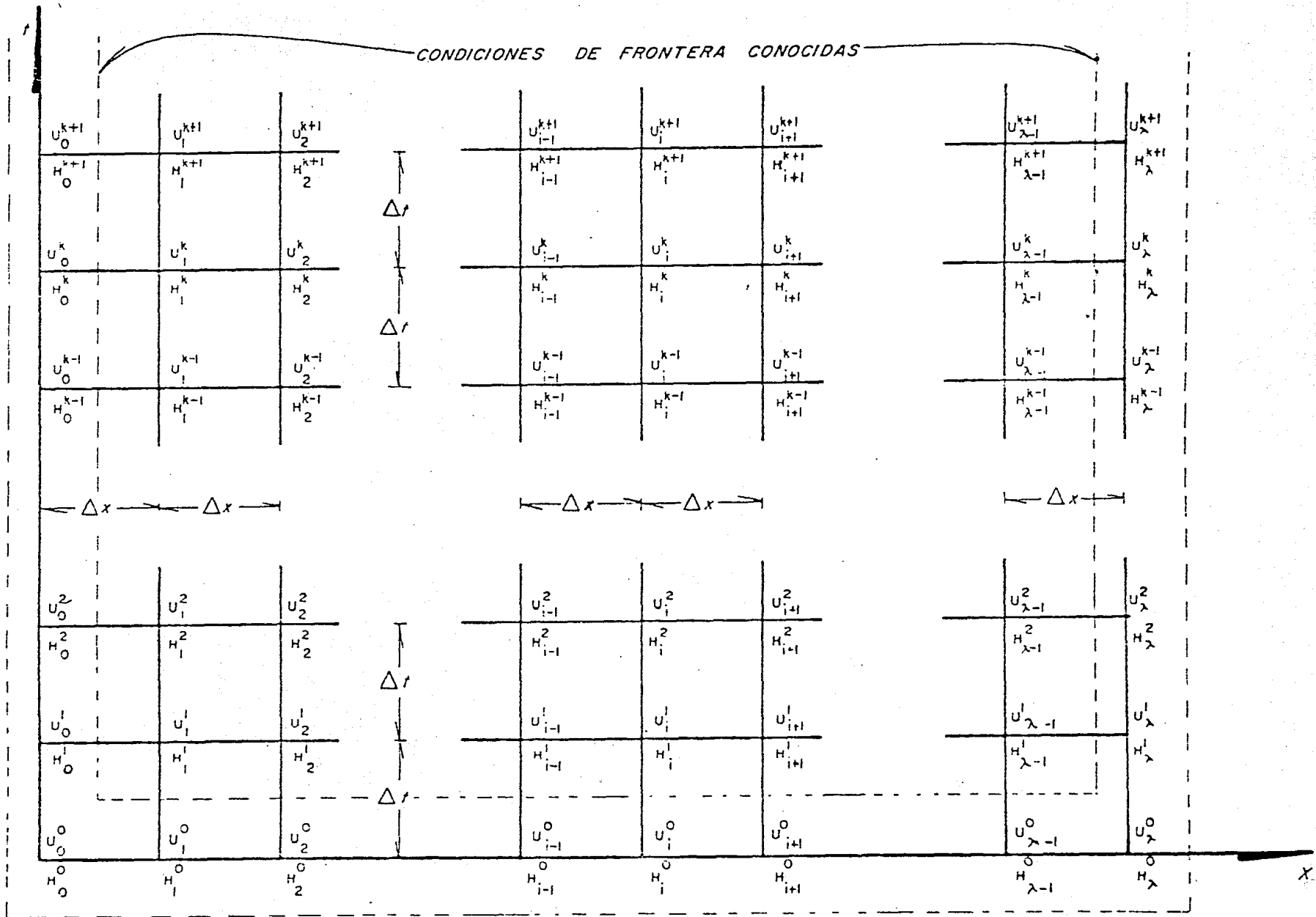


Figura 3-28 Malla en el plano $x-t$

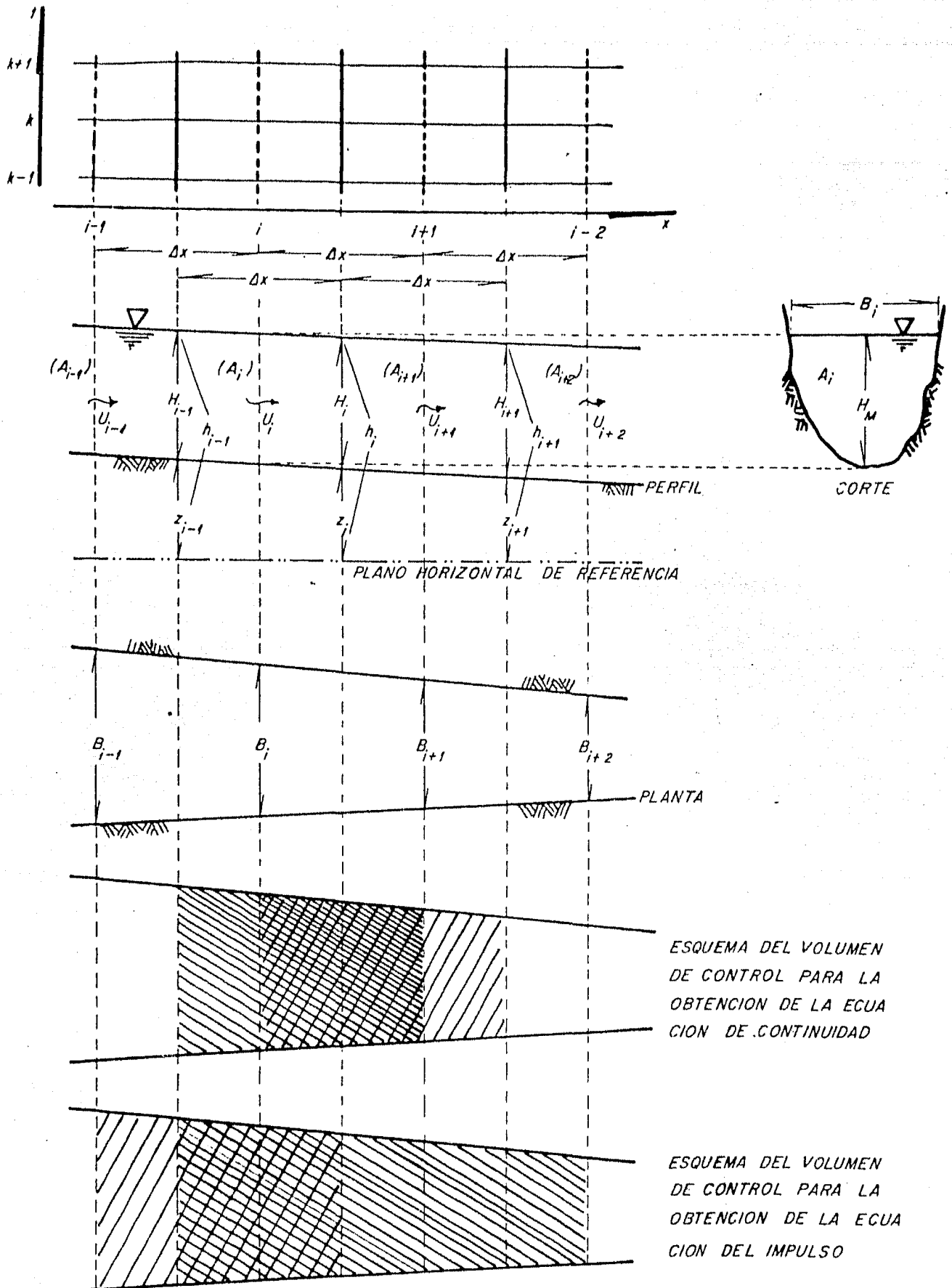


Figura 3-29 Esquemas usados en el desarrollo del metodo implicito a partir de las ecuaciones integrales

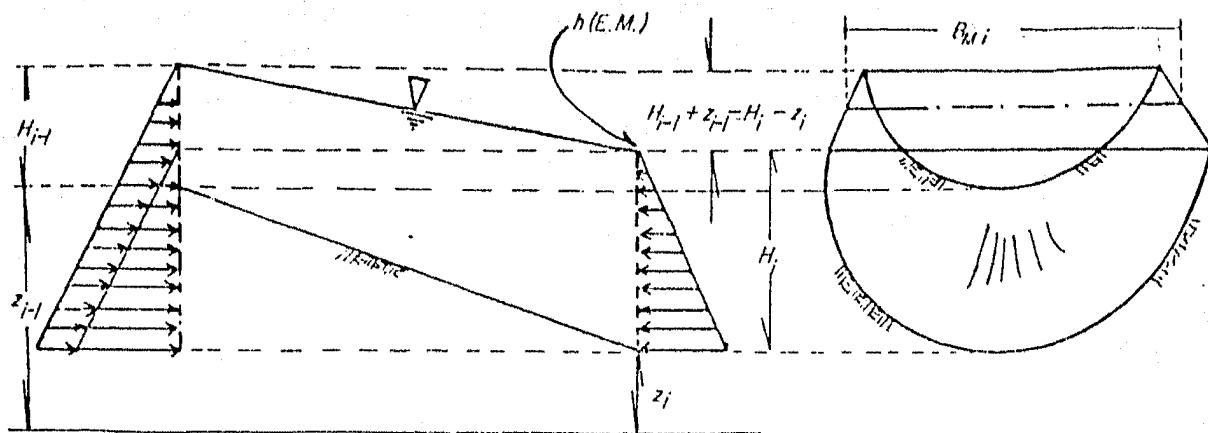


Figura 3-30 Distribución de presiones en el volumen de control

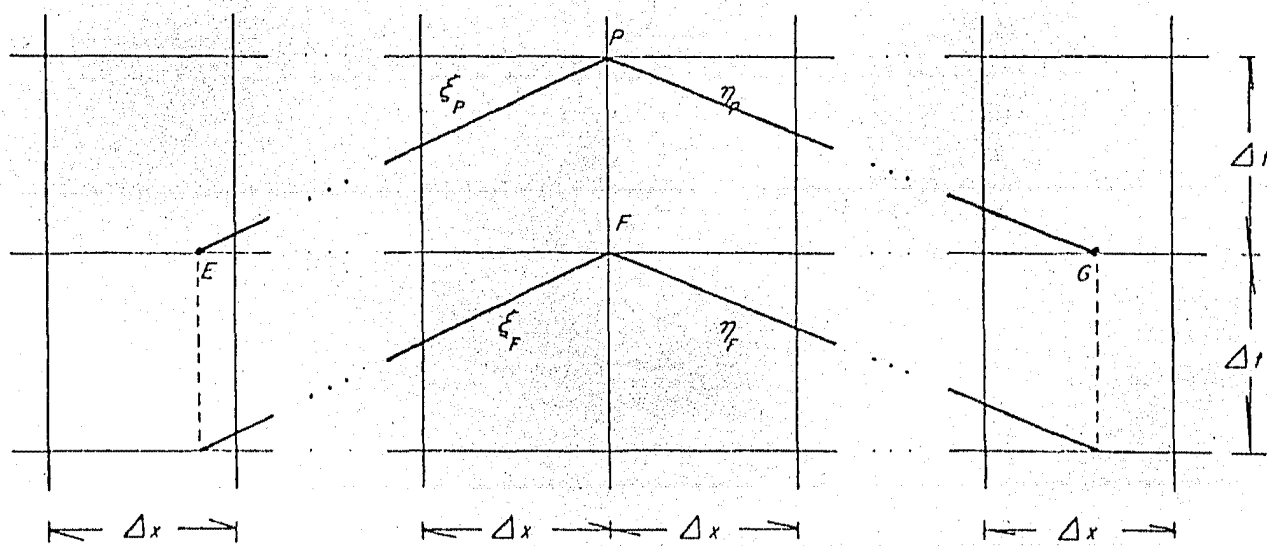


Figura 3-31 Hipótesis para la estimación de las líneas características que pasan por el punto P

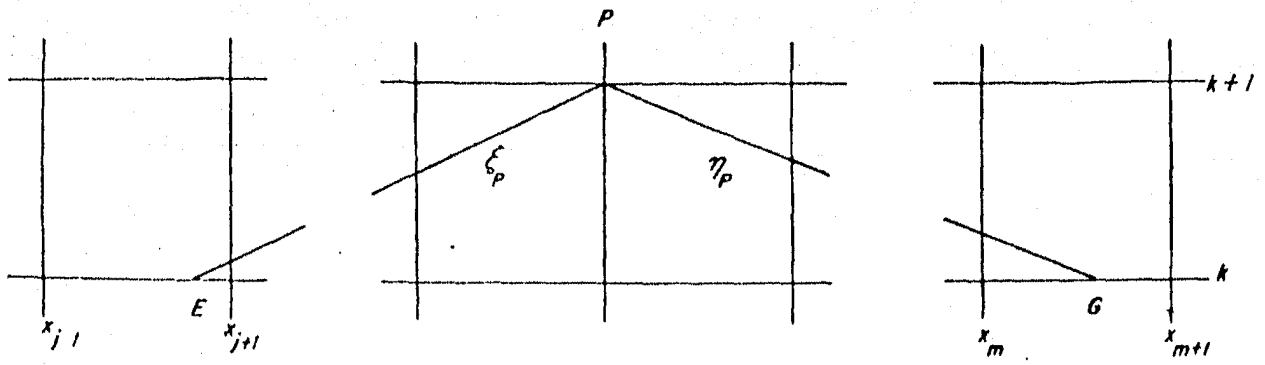


Figura 3-32 Puntos para la interpolación de los tirantes H y las velocidades U en los puntos E y G

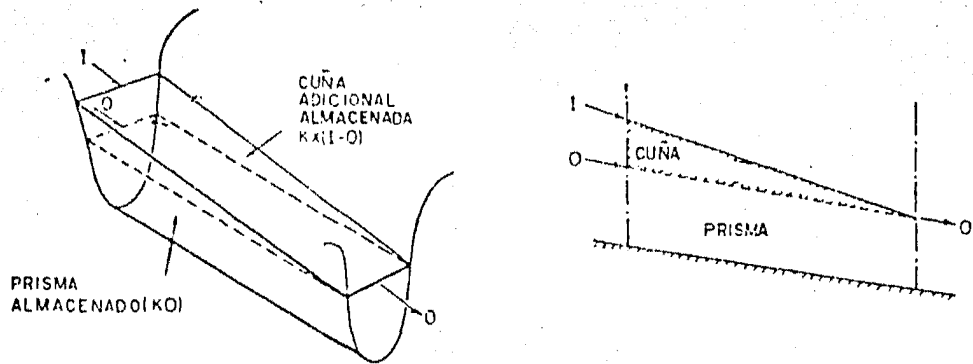


Figura 3-33 Volumen de control para la ecuación de Muskingum

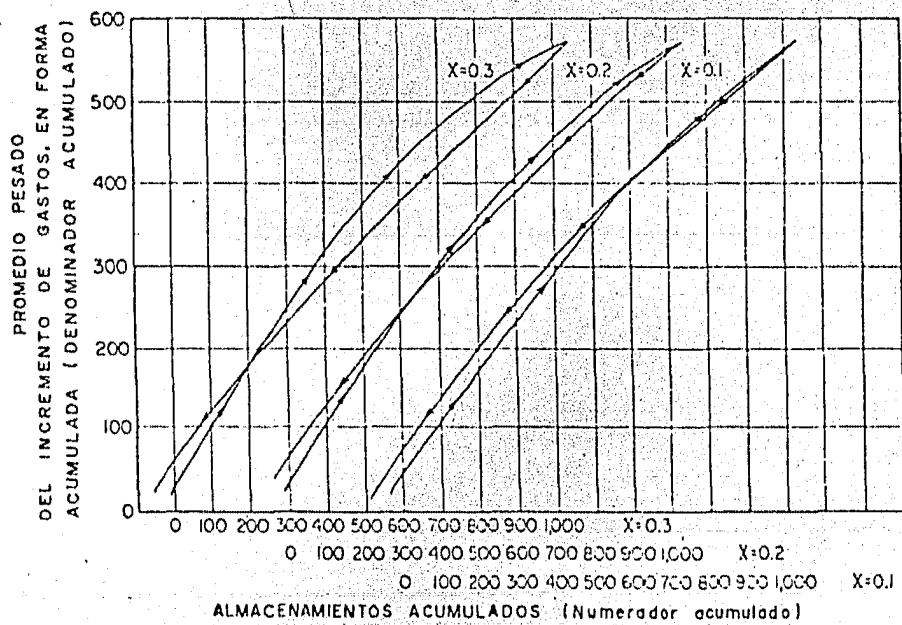


Figura 3-34 "Ojales" de almacenamiento para un intervalo Δt

4. UN NUEVO METODO

La construcción de un modelo que considere todos los factores que intervienen en el proceso lluvia-escorrentamiento, implica manejar una cantidad inaccesible de datos más un sistema demasiado complejo de ecuaciones que relacione los distintos conjuntos de información. Debido a esto, es necesario recurrir a simplificaciones que limiten el número de variables que intervienen en el cálculo y facilitar así su solución.

4.1 Hipótesis en el planteamiento del fenómeno

Con base en lo presentado en el capítulo de conceptos básicos, se supone que los factores involucrados en el proceso precipitación-escorrentamiento más importantes son:

- a) La precipitación sobre la superficie analizada en cada intervalo de tiempo.
- b) Los gastos registrados en cada instante a la salida del área estudiada.
- c) El almacenamiento instantáneo sobre la superficie de la cuenca.
- d) La cantidad de agua infiltrada en cada unidad de tiempo.

Dichas suposiciones acotan el problema de modo que en cada instante de tiempo se dispone de un dato: la precipitación; y tres incógnitas por resolver:

- a) La infiltración,
- b) el almacenamiento, y
- c) las descargas.

Por lo tanto, para la solución del problema es preciso disponer de tres ecuaciones independientes que relacionen las tres incógnitas con el dato.

4.2 Hipótesis para la solución del problema

En la figura 4-1, (Δt) es la unidad de tiempo expresada en segundos; h_{p_i} la precipitación, en milímetros, registrada en el i -ésimo intervalo de tiempo, supuesta uniformemente distribuida en el área A (m^2) de la cuenca; T_{1j} es el tiempo que dura la precipitación; el caudal promedio durante el j -ésimo intervalo de tiempo en la descarga de la cuenca, es Q_j , y se expresa en m^3/s ; la duración total fenómeno está representada por T_0 , y va desde que se inicia la precipitación, hasta que cesa el escurrimiento directo.

Suponiendo que las pérdidas de lluvia ocurridas en cada instante son una función de la precipitación antecedente, que depende de las características del suelo y decrece con el tiempo transcurrido desde el inicio de la precipitación; la relación que describe el comportamiento en el tiempo puede expresarse como:

$$f_i = a - bt^n \quad (4-1)$$

donde a es un parámetro de la cuenca que depende de las características de la cuenca en estudio y de la precipitación antecedente a la tormenta analizada. Representa la capacidad de infiltración del suelo al iniciarse el proceso; b es un parámetro representativo del decaimiento de la infiltración en la cuenca al transcurrir el tiempo e incidir la precipitación, por lo tanto es función de las características del terreno; n es una constante característica de la cuenca; f_i son las pérdidas en el

i -ésimo intervalo de tiempo; y t es el tiempo transcurrido, medido desde el inicio de la lluvia ($t = i (\Delta t)$).

Otra hipótesis importante se refiere al almacenamiento en la cuenca.

Este se supone dependiente del gasto en la descarga de la cuenca, según la relación:

$$S_i = CO_i^x \quad (4-II)$$

En esta ecuación S_i es el almacenamiento, en volumen, en el instante i ; C es una constante que puede relacionarse con la morfología de la cuenca, y O es la descarga en la salida del drenaje.

La tercera ecuación considerada para completar el sistema, es la ecuación de continuidad de masa, expresada como:

$$I_i - O_i = (\Delta S)_i + f_i \quad (4-III)$$

donde

I_i es el gasto promedio que ingresa al área A de la cuenca, debido a la precipitación en el intervalo i :

$$I_i = \frac{A h_{pi}}{(\Delta t)} \quad (1000)$$

para expresarse en m^3/s h_p debe expresarse en mm , A en Km^2 y

Δt en segundos, (ΔS) es la variación del almacenamiento sobre la cuenca en el i -ésimo intervalo de tiempo; variación que tomando en cuen-

ta la ecuación (4-II) queda expresada como:

$$(\Delta S)_i = \Delta (CO_i^x) = CXO_i^{x-1} (\Delta O)$$

$$\therefore (\Delta S)_i = CXO_i^{x-1} (O_i - O_{i-1}) \quad (4-IV)$$

substituyendo (4-IV) en (4-III):

$$I_i - O_i = CXO_i^{x-1} (O_i - O_{i-1}) + f_i \quad (4-V)$$

e integrando entre $t=0$ y $t=T_o$:

$$\int_0^{T_o} (I_i - O_i) dt = \int_0^{T_o} CXO_i^{x-1} (O_i - O_{i-1}) dt + \int_0^{T_o} f_i dt$$

dado que $\int_0^{T_o} CXO_i^{x-1} (O_i - O_{i-1}) dt = 0$ porque se supone que no se queda

nada almacenado en la cuenca, sino que escurre o se infiltra,

$$\int_0^{T_o} (I_i - O_i) dt = \int_0^{T_o} f_i dt \quad (4-VI)$$

La ecuación (4-V) significa que:

$$(\text{VOLUMEN LLOVIDO}) - (\text{VOLUMEN ESCURRIDO}) = \int_0^{T_o} f_i dt$$

o sea, las pérdidas (F), de ahí que substituyendo (4-V) en (4-I) se obtiene:

$$F = \int_0^{T_0} (a - bt^n) dt = \left[at - b \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{T_0} = aT_0 - \frac{bT_0^{n+1}}{n+1}$$

Dividiendo entre T_0 :

$$\frac{F}{T_0} = a - \frac{bT_0^n}{n+1} \quad (4-VII)$$

El término $\frac{F}{T_0}$, representa el conocido índice de infiltración media,

denotado generalmente como ϕ .

Despejando en (4-VII) al parámetro a:

$$a = \phi + \frac{b}{n+1} T_0^n$$

y substituyendo en (4-I):

$$f_i = \phi + \frac{b}{n+1} T_0^n - bt^n$$

$$\therefore f_i = \phi + b \left(\frac{T_0^n}{n+1} - t^n \right) \quad (4-VIII)$$

substituyendo esta última en (4-V) y disponiendo convenientemente los

términos:

$$I_i - O_i - \phi = CXO_i^{x-1}(O_i - O_{i-1}) + b\left(\frac{T_o^n}{n+1} - t^n\right) \quad (4-IX)$$

Si en esta última relación se hace que:

$$Z_i = I_i - O_i - \phi ; \quad X_i = (O_i - O_{i-1})O_i^{x-1} ; \quad Y_i = \frac{T_o^n}{n+1} - t^n$$

$$CX = a \quad \text{y} \quad b = \beta ,$$

se obtiene

$$Z_i = a X_i + \beta Y_i \quad (4-X)$$

4.3 Calibración

Si se dispone de registros de precipitaciones y escurrimientos en forma simultánea y continua, se pueden suponer inicialmente valores de n y x (es conveniente escogerlos entre cero y uno) y en cada intervalo de tiempo (Δt) valuar (4-X). Con todos los puntos Z_i obtenidos, se hace el ajuste de ellos a un plano que pase por el origen con ecuación: (Ref. 13).

$$Z = AX + BY \quad (4-XI)$$

Dado que los valores de x y n han sido arbitrariamente escogidos, se tiene que en cada punto Z_i se está cometiendo un error e_i (mínimo de-

bido al ajuste realizado), que vale:

$$e_i = \hat{Z}_i - Z_i$$

donde \hat{Z}_i es el valor obtenido de aplicar (4-X) y Z_i se obtiene a partir de (4-XI), o sea, el medido y el calculado, respectivamente.

Suponiendo que cada uno de estos errores es función exclusivamente de los valores x y n escogidos, haciendo la suma (E^2) de los cuadrados de todos ellos,

$$E^2 = \sum \{(e_i)^2\}$$

para diferentes combinaciones de x y n , se puede obtener la combinación que proporcione el menor valor de E^2 (esto implica que se ajuste mejor al plano supuesto), y considerar que los valores de los parámetros x y n así obtenidos representan los característicos de la cuenca y de la precipitación antecedente correspondiente a la tormenta utilizada.

Procediendo en forma análoga para diferentes tormentas medidas, y asociando los resultados a las precipitaciones ocurridas antes de la analizada cada vez, se puede llegar a un conjunto de x y n típicos de la cuenca y precipitaciones antecedentes con los cuales se pueden estimar los escurrimientos para las condiciones de humedad existentes en el momento de iniciarse la lluvia.

Una vez obtenidas las relaciones x y n contra precipitación anteceden-

te, se puede predecir el comportamiento de la cuenca mediante la ecuación (4-IX).

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La complejidad del proceso precipitación-escorrentía hace indispensable que para su análisis se consideren simplificaciones de cálculo. Estas simplificaciones generalmente están basadas en mediciones directas de la lluvia, del escurrimiento, y en general, de las respuestas de la cuenca ante la precipitación. Por lo tanto, es importante disponer de cuencas piloto con instrumentación adecuada para verificar las hipótesis y calibrar las simplificaciones.

Por otro lado, resulta de particular importancia que los modelos escogidos para el análisis estén acorde con los propósitos del estudio y con las características de la región examinada. A continuación se expone un breve análisis de los modelos referidos en el presente trabajo, señalando sus ventajas y limitaciones.

. Método Racional. El modelo es fácilmente aplicable a cualquier cuenca; existen en la literatura una gran cantidad de trabajos que proporcionan coeficientes de escurrimiento para diferentes tipos de zonas. Sus principales limitaciones son: El hecho de considerar que el flujo se establece durante la lluvia, ocasiona, generalmente, que los gastos obtenidos sean mayores que los reales; la consideración de incluir todos los factores que definen el proceso precipitación-escurrimiento en un sólo coeficiente, el coeficiente de infiltración, lo hace a éste un parámetro muy sensible ante ligeras modificaciones en la cuenca, lo que podría redundar en graves diferencias entre lo estimado y lo real; debido a las razones inmediatas anteriores, se requiere de cierta experiencia y conocimiento detallado de la zona para estimar el coeficiente de escurrimiento.

Se recomienda utilizar este modelo para estimaciones preliminares y en áreas pequeñas (menores de 5 Km^2 ; antecedentes b y d); aplicable a cualquier tipo de cuenca.

. Método Gráfico Alemán. Su uso es sencillo, lo que lo hace atractivo. Proporciona no sólo el gasto máximo, sino que se obtiene el hidrograma de descarga; la subdivisión del área total hace factible considerar zonas fisiográficamente homogéneas, evitando así tomar valores medios con desviación excesiva. Las restricciones básicas son: Los parámetros más importantes (coeficientes de escurrimiento y tiempos de concentración), son de difícil estimación; generalmente, los tiempos de defasamiento se calculan en forma independiente del gasto que ocurre en el tramo analizado, por lo cual, al estimar el gasto de diseño, este último en general resulta poco conservador (se ha visto que la onda cinemática avanza con velocidades mayores a medida que se incrementa el tirante).

Se recomienda: Realizar investigaciones tendientes a modificar la forma de cálculo de los tiempos característicos tomando en cuenta la variación de los gastos instantáneos y los tirantes entre la sección considerada y la descarga; utilizar áreas lo más reducidas posible; aplicar el modelo en zonas urbanizadas o semiurbanizadas; usarlo únicamente para cálculos aproximados, teniendo en cuenta que generalmente proporciona resultados poco conservadores.

. Método del Hidrograma Unitario. Este modelo, tal como se presenta en este trabajo, tiene limitado valor práctico, dado que las hipótesis de linealidad y distribución uniforme de la lluvia dificultan su

calibración, no obstante, la potencialidad de las ideas generales es grande y ha contribuido al desarrollo de modelos más complicados, aunque más precisos, en los cuales puede considerarse una lluvia no uniforme (Artículos 3, 6, 9 y 12 de la bibliografía). Es prácticamente aplicable a cualquier tipo de cuencas. La desventaja principal de este tipo de metodologías es que requiere de datos de precipitaciones y escurrimientos en las zonas a utilizar, y en el caso de cuencas urbanas del país estos datos son muy limitados.

Método del Road Research Laboratory. Puede ser utilizado en zonas urbanas y semiurbanas donde sea necesaria una revisión del drenaje. Su aplicación es sencilla en áreas de pequeña magnitud, en las cuales se pueda suponer que las variaciones de lluvia sean simultáneas; el área debe ser homogénea, y las características de infiltración uniformes, aunque la posibilidad de analizar lluvias variables en el tiempo representa una ventaja considerable. Proporciona la historia de los escurrimientos en el tiempo.

Sus limitaciones básicas son: Requiere de las curvas isócronas en el área drenada y de la curva almacenamientos-gastos. La estimación de las isócronas depende de la técnica que se utilice para ello, generalmente inciertas o muy elaboradas; el suponer que las isócronas no varían con el tiempo constituye una desventaja seria, porque en realidad la velocidad con la cual son calculadas las

isócronas varía con la intensidad, dado que los almacenamientos en el drenaje, los efectos de la rugosidad en las superficies y los tirantes del flujo varían con ella. La construcción de la curva almacenamientos-gastos no es tan incierta cuando se tienen registros del escurrimiento, pero si no es así, su construcción requiere de aproximaciones poco confiables.

Método del Hidrograma de Chicago. El modelo puede ser utilizado en áreas urbanas, aunque algunas de sus hipótesis simplificatorias no pueden ser utilizadas directamente en el país (hipótesis para simplificar el tránsito en colectores y subcolectores), ya que la localización de las alcantarillas que recolectan el agua de las áreas elementales, ni están uniformemente distribuidas, ni drenan a zonas de características similares; no obstante, los principios generales pueden adoptarse teniendo en cuenta las características específicas de las ciudades donde se vaya a emplear.

El análisis detallado que hace de los procesos iniciales (drenaje en áreas elementales), se nota contrastante con las simplificaciones para los tránsitos en el drenaje subterráneo, por lo tanto se recomienda utilizar una metodología diferente en el tránsito por los colectores, que equilibre el método, obteniéndose así resultados más precisos.

Métodos Hidráulicos. Estos, si se dispone de la información nece-

saria, son los más precisos. Proporcionan la evolución del flujo en cualquier instante y posición. Es posible utilizarlos con lluvias variables, en espacio y tiempo; para estudiar modificaciones o nuevos sistemas de drenaje; en áreas de cualquier tipo, desde naturales, hasta totalmente urbanizadas; es factible incluir inundación en las llanuras adyacentes a los cauces, o el escurrimiento simultáneo por el drenaje subterráneo y por las calles.

Como inconvenientes de este tipo de enfoques se puede mencionar: Es necesario conocer con detalle la región a estudiar. Es indispensable disponer de computadoras con gran capacidad de memoria. Se debe poner atención especial a los errores originados por la estabilidad, convergencia e incompatibilidad del esquema utilizado (Ref. 6). Es complejo proporcionar las condiciones de frontera.

Algunas particularidades de los esquemas son: En el caso del método basado en las ecuaciones características, aún cuando es de los más precisos, se requieren tiempos de cálculo grandes para no violar las condiciones de estabilidad del esquema (Referencias Bibliográficas, número 1, 2, 5 y 12), pero el modelo tiene particular interés porque proporciona las bases para establecer las condiciones de frontera en este tipo de análisis. Los esquemas implícitos basados en las ecuaciones integrales del movimiento y los

obtenidos a partir de las ecuaciones diferenciales parciales, requieren comparativamente menos tiempo de cálculo, dado que frecuentemente son más estables que los explícitos y los incrementos de tiempo pueden ser mayores, pero requieren de un análisis detallado para asegurar la compatibilidad entre la ecuación diferencial original y la aproximada mediante diferencias finitas (Referencia Bibliográfica, número 1).

Un Nuevo Método. Como ya se indicó, el modelo es una primera aproximación; se pretende que pueda ser utilizado en cualquier tipo de cuencas pequeñas; pero es necesario calibrar una serie de parámetros a partir de mediciones simultáneas de lluvias y escurrimientos. Los resultados obtenidos hasta el momento, son aún escasos, pero satisfactorios tomando en cuenta el avance en su estudio, y se piensa que son prometedores para futuras predicciones una vez que se disponga de zonas tipo con sus parámetros representativos.

REFERENCIAS

1. Capella, V.A., Sánchez, B.J.L., "Método Estadístico Para determinar la Relación Precipitación-Escorrimento". Publicación No. 145 del Instituto de Ingeniería, UNAM (Septiembre, 1967).
2. Cruickshank, V.C., "Modelos para el Tránsito de Avenidas en Cauces con Llanuras de Inundación". Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM, para el Plan Nacional Hidráulico. (Diciembre de 1974).
3. Chow, V.T., "Handbook of Applied Hydrology", Mc. Graw-Hill Book Co., N.Y., (1964).
4. Chow, V.T., "Hydrologic Determination of Waterway Areas for the Design of Drainage Structures in Small Drainage Basins", Univ. Ill., Engng. Expt. Sta. Bull 462 (1962).
5. Chow, V.T., "Open- Channel Hydraulics", Mc Graw-Hill Kogakisha, LTD., Tokyo., (1959).
6. Forsythe, Wason, "Finite Difference Methods for Partial Differential Equations".
7. Hicks, W.I., "A Method of Computing Urban Runoff", Transactions of the ASCE, Vol. 109, (1944).
8. Hicks, W.I., Discussion By., Horner, W.W., Jens, S.W., "Surface Runoff Determination From Rainfall Without Using Coefficients", Transactions of the ASCE, Vol. 107 (1942).
9. Horner, W.W., Jens, S.W., "Surface Runoff Determination From Rainfall Without Using Coefficients", Transactions

of the ASCE, Vol. 107 (1942).

10. Horton, R.E., "Analysis of Runoff-Plat Experiments With Varying Infiltration-Capacity", Transactions of American Geophysical Union, Vol. 20 (1939).
11. Izzard, C.F., "Hydraulics of Runoff From Development Surfaces", Proceedings, Hyghway Research Board, National Research Gouncil (Dec., 1956).
12. Linsley, Kohler, Paulhaus, "Hydrology for Engineers" Mc Graw-Hill Book Co., (1975).
13. Miller, I., Freund, J.E., "Probability and Statistics for Engineers", Prentice-Hall, Inc. (1967).
14. Rouse, H., "Engineering Hydraulics", John Wiley & Sons, Inc., N.Y., (1950).
15. Sherman, L.K., "Streamflow from Rainfall by the Unit-Graph Method", Eng. News-Record No. 108 (1932).
16. Springall, G.R., "Hidrología, primera parte", Publicación No. D7 del Instituto de Ingeniería, UNAM, (abril 1970).
17. Tholin, A.L., Keifer., C.J., "The Hydrology of Urban Runoff" ASCE, Journal of the Sanitary Engineering Division, Proc. Paper No 1984, SA2 (March, 1959).
18. Yevjevich, V., Barnes, A.H., "Flood Routing Through Storm Drains Parts I, II, III and IV", Colorado State University, Fort Collins, Colorado, Hydrology Papers No 43,44,45 and 46 (November, 1970).

BIBLIOGRAFIA

1. Amein, M., "An Implicit Method for Numérical Flood Routing" Water Resources Research, Vol. 4 (Aug. 1968)
2. Amein, M., "Streamflow Routing on Computer by Characteristics", Water Resources Research Vol. 1 (First Quarter (1966)).
3. Arrioja, J.R., "Modelo del Hidrograma Unitario Instantáneo; Aplicación a la Cuenca del Río Papaloapan", Tesis Profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM (1975).
4. Butler, S.S., "Engineering Hydrology", Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, N.M. Newmark (Editor), Englewood Cliffs, N.Y. (April 1959).
5. Capella, V.A., "Cálculo de Ondas de Avenida a lo largo de Cauces no Uniformes", Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería de la UNAM (1963).
6. Eagleson, P.S., Mejía, R., R., March, F., "Computation of Optimum Realizable Unit Hydrographs", Water Resources Research Vol. 2, No 4 (1966).
7. Kupriyanov, V.V., "Hydrologic Aspects of Urbanization" Soviet Hydrology: Selected Papers Published By the American Geophysical Union No 5 (1973).
8. Mc. Pherson, M.B., "Hydrological Effects of Urbanization", Report of the Sub-group on the Effects of Urbanization on the Hydrological Environment, of the Coordinating Council of the International Hydrological Decade, The Unesco Press (Paris 1974).

9. Newton, D.W., Vinyard, J.W., "Computer-Determined Unit Hydrograph From Floods", ASCE, Journal of the Hydraulics Division, No HY5, Proc. Paper 5449 (sept. 1967).
10. Schuwab, G.O. Frevert, R.K., Edminster, T.W. Barnes, K.K. "Soil and Water Conservation Engineering" Second Edition, John Wiley & Sons, Inc. (1966).
11. Shokitsch, A., "Tratado de Arquitectura Hidráulica" Tomo I, Gustavo Gili, S.A. Barcelona.
12. Snyder, F.F., "Synthetic Unit Hydrographs", Trans. Am. Geophys Union, Vol. 19 (1938).
13. Sotelo, A.G., "Hidráulica General", Editorial Limusa, S.A. (1974).
14. Springall, G.R., "Drenaje en Cuencas Pequeñas", Publicación No 143 del Instituto de Ingeniería, UNAM (1969).
15. Strelkoff, T., "Numerical Solution of Saint-Venant Equations", ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 96 No HY1, Proc. Paper 7043 (Jan., 1970).
16. Terstriep, M.L., Stall, J.B., "Urban Runoff by Road Research Laboratory Method", ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 95, No HY6, Proc. Paper No 6878 (Nov. 1969).