

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA



**ANALISIS DE FENOMENOS TRANSITORIOS
EN TURBINAS.**

T E S I S
I N G E N I E R O C I V I L
S A L V A D O R R I V E R O L A B O R D E

México, D. F.

1980



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



UNIVERSIDAD NACIONAL

ALFARO

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-1-178

Al Pasante señor SALVADOR RIVERO LABORDE,
P r e s e n t e .

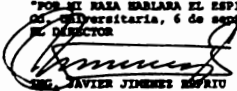
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Antonio Fernández Esparsa, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"ANÁLISIS DE FENÓMENOS TRANSITORIOS
EN TURBINAS"

- I. Introducción
- II. Metodología de análisis de transi-
torios
- III. Problema de aplicación y alcance
- IV. Conclusiones

Espero a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional, así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"
C.D. Universitaria, 6 de septiembre de 1979
EL DIRECTOR



ING. JAVIER JIMÉNEZ ESPRIÚ

JJE/OBLE/ser

I N D I C E

1. DESCRIPCION DE FENOMENOS TRANSITORIOS
 - 1.1 GENERALIDADES
 - 1.2 CONDICIONES EN QUE SE PRESENTAN LOS FENOMENOS TRANSITORIOS.
 - 1.3 OPERACIONES EN QUE SE PRESENTAN LOS FENOMENOS TRANSITORIOS.

2. METODOLOGIA DE ANALISIS DE TRANSITORIOS
 - 2.1 GENERALIDADES
 - 2.2 METODOS EXISTENTES
 - 2.3 COMPARACION DE LOS METODOS MAS UTILIZADOS PARA ANALISIS DE GOLPE DE ARIETE
 - 2.4 DESARROLLO DEL METODO DE CARACTERISTICAS

3. PROBLEMA DE APLICACION Y ALCANCE
 - 3.1 APLICACION Y ALCANCE
 - 3.2 DATOS DEL CASO SIMULADO
 - 3.3 CASOS ANALIZADOS
 - 3.4 RESULTADOS
 - 3.5 PROGRAMA DE COMPUTADORA

4. CONCLUSIONES

1. DESCRIPCIÓN DE FENÓMENOS TRANSITORIOS

1.1 GENERALIDADES

Las sobrepresiones y depresiones generadas en conducciones forzadas por golpe de ariete, deben mantenerse dentro de límites estrictos de seguridad, dado el alto costo de estos sistemas; por lo tanto su estudio detallado es una parte importante del diseño de estos.

A lo largo de este estudio se utilizan términos sinónimos de golpe de ariete por lo que los definiremos a continuación.

El término flujo inestable es utilizado como sinónimo de golpe de ariete para indicar condiciones de flujo que cambian rápidamente en el tiempo; flujo transitorio se define como la situación de flujo inestable durante la cual se pasa de un estado estable a otro estado estable.

Cuando el flujo es transitorio, esto es cuando el gasto y la presión varían rápidamente en una sección de un momento a otro, el fenómeno se rige en estos casos por la necesidad de equilibrio dinámico que requiere que la fuerza que actúa en un elemento de agua sea igual al producto de su masa por la aceleración; esto es, la segunda ley de Newton del movimiento debe ser satisfecha. La condición de continuidad exige que el espacio del elemento esté siempre lleno de agua.

1.2 CONDICIONES EN QUE SE PRESENTAN LOS FENÓMENOS TRANSITORIOS.

En conducciones forzadas, considerando que éstas conserven su geometría, es decir que su estructura no sufre ningún colapso, solo se puede presentar un fenómeno transitorio debido a cambios en las

condiciones de frontera del sistema.

En el caso de generación hidroeléctrica, alguna de las condiciones de frontera que pueden inducir transitorios en el sistema de generación son:

- a) Arranque de una unidad aislada
- b) Rechazos de carga, parciales o totales
- c) Aumento en la demanda de potencia
- d) Oleaje en el túnel de desfogue
- e) Vibración en las partes mecánicas de las turbinas
- f) Operaciones de cierre o apertura de válvulas
- g) Falla de sistemas auxiliares

Uno de los casos más frecuentes que se presentan y que genera transitorios de importancia es el rechazo total de carga, lo cual si no se tienen dispositivos de control del golpe de ariete puede provocar daños de consideración.

El rechazo de carga da origen a los siguientes eventos, considerando que la turbina incrementa su velocidad rotacional, este incremento causa grandes pérdidas que a su vez reducen el gasto y el par torsional (eventualmente la turbina alcanza la velocidad de fuga cuando el par torsional neto es igual a cero).

Al disminuir el gasto se originan ondas de presión positivas que se propagan hacia aguas arriba de la turbina, en tanto que ondas de presión negativas se propagan hacia aguas abajo. Ambas ondas se reflejarán en las fronteras externas respectivas regresando con sentido opuesto, manteniéndose este fenómeno hasta disipar su energía.

Las presiones alcanzadas pueden causar graves daños por sobrepresión o por rompimiento de la columna de agua.

El papel de los dispositivos de control y de protección es evitar las grandes sobrepresiones y ruptura de la columna de agua, así como controlar todas las situaciones que afecten a la correcta operación del sistema. Situaciones que se presentan tanto en forma accidental como en operaciones normales, por lo que los dispositivos de control son indispensables en sistemas de generación eléctrica.

1.3 OPERACIONES EN QUE SE PRESENTAN FENOMENOS TRANSITORIOS.

Los sistemas de tuberías que contienen maquinaria tal como turbinas requieren un análisis que tome en cuenta los cambios ocurridos en las características de las unidades al tiempo que ocurren cambios en su velocidad rotacional.

Una unidad conectada a un gran sistema gira a la velocidad sincrónica durante la aceptación de carga o el rechazo a causa de la gran inercia del sistema, sin embargo la velocidad de una unidad aislada se eleva durante el rechazo de carga y disminuye durante la aceptación de carga.

En las turbinas Kaplan y Francis la velocidad de la turbina tiene considerable influencia en los transitorios, por lo que los cambios de velocidad deberán ser tomados en consideración en los cálculos de transitorios para estas turbinas.

Cuando se arranca una unidad, los álabes directores son abiertos de tal manera que la unidad pueda vencer la fuerza de fricción estática. Los álabes se mantienen en esta posición hasta alcanzar el 60% de la velocidad normal, entonces se cierran hasta la posición de velocidad-sin-carga, y se permite girar la turbina a

la velocidad síncrona por un período corto de tiempo. Una vez sincronizada con el sistema está lista para aceptar carga.

Para aceptar carga, los álabes se abren a la abertura prescrita en que la potencia salida de la turbina será igual a la potencia de salida final. Similarmente los álabes se abren o cierran para una variación de carga.

El cierre de álabes siguiendo un rechazo de carga depende del tipo de rechazo.

Basados en la frecuencia de ocurrencia, existen varias condiciones de operación que pueden ser clasificados como normal, de emergencia y catastrófica.

Las operaciones normales son aquellas que ocurren varias veces durante la vida de los túneles de presión durante estas operaciones, los dispositivos como torres de oscilación, válvulas reguladoras de presión y amortiguadores de carrera provistos para reducir la presión en exceso o las caídas de presión deben funcionar adecuadamente. Las siguientes operaciones son consideradas normales:

1. Rechazo de carga y cierre de los álabes directores en el tiempo efectivo de cierre con la carga estática de la turbina en su valor máximo.
2. Abertura de los álabes directores a partir de la velocidad-sin-carga a la abertura total en el tiempo efectivo de abertura, con la carga estática de la turbina en su mínimo valor.

Las condiciones de emergencia son aquellas en que el equipo de control de presión, no trabaja adecuadamente. Estas condiciones incluyen:

1. La válvula reguladora de presión no opera en una unidad
2. El dispositivo de amortiguamiento de carrero no opera en cada unidad.

Las condiciones catastróficas incluyen varios dispositivos trabajando inadecuadamente en la forma más desfavorable, por ejemplo:

Si el sistema está provisto de una válvula de regulación, entonces el sistema del mecanismo de cierre de los álabes directores se diseña de tal modo que se cierre lentamente en caso que la válvula de regulación no opere durante un rechazo de carga. Sin embargo, si la válvula de regulación no funciona y el mecanismo de cierre de los álabes directores no realizan el cierre lentamente, la operación se considera catastrófica.

2. METODOLOGIA DE ANALISIS DE TRANSITORIOS

2.1 GENERALIDADES

Dada la importancia de un sistema de generación hidroeléctrica, el conocimiento de las sobrepresiones y subpresiones a lo largo del túnel de presión, del desfogue y en las turbinas, es muy importante para todas las fases de operación. Por lo tanto el análisis del golpe de ariete que se efectúe, debe reflejar este hecho.

La metodología empleada debe ser, entonces, lo suficientemente flexible de modo que permita examinar la influencia de los parámetros que definen el golpe de ariete.

Según el estudio bibliográfico realizado, existen varios métodos para el análisis del golpe de ariete, cada uno desarrollado para ciertos casos especiales y pocos lo suficientemente generales como para permitir la flexibilidad necesaria.

Se analizan a continuación los diferentes métodos utilizados, señalando sus ventajas y desventajas, las cuales permitieron escoger un método específico de acuerdo a nuestras necesidades.

2.2 METODOS EXISTENTES

Desde el año de 1960 en que los métodos de análisis de golpe de ariete fueron enfocados al uso de computadoras, han quedado como métodos de uso general solo tres; el método gráfico, el método de características y diversos métodos de aplicación de diferencias finitas. Otros métodos han sido utilizados para problemas específicos, (ref. (1)), y no son discutidos aquí.

De los tres métodos de análisis, de golpe de ariete, el de características y los métodos de diferencias finitas son de aplicación muy similar, distinguiéndose fundamentalmente en que uno se basa en un esquema explícito de diferencias finitas después del desarrollo del método de características u el otro en un esquema implícito de diferencias finitas aplicado a las ecuaciones diferenciales básicas del golpe de ariete. Para la diferencia de los esquemas explícitos e implícito remitimos a la referencia (2).

En el siguiente párrafo comparamos los métodos mencionados anteriormente.

2.3 COMPARACION DE LOS METODOS MAS UTILIZADOS PARA ANALISIS DE GOLPE DE ARIETE.

A continuación se desarrolla la comparación de los métodos generales más utilizados actualmente para el análisis del golpe de ariete.

a) Método Gráfico

El método gráfico omite la fricción en su desarrollo teórico, pero se usa correcciones para tomarla en cuenta, se usan las ecuaciones diferenciales parciales de movimiento (segunda ley de Newton) y de continuidad para su derivación y se obtienen también las ecuaciones generales de ondas mecánicas. Este método ha sido el de uso más popular y más práctico, hasta la aparición de los computadores.

Las ventajas del método gráfico son las siguientes: amplia visual-

lización del desarrollo del fenómeno, facilidad en el análisis de sistemas sencillos de tuberías.

Las desventajas son las siguientes: dificultad para mantener la exactitud, necesidad de soluciones hipotéticas para muchas condiciones de frontera, dificultad para analizar sistemas complejos con buena exactitud, no toma en cuenta la inclinación de los tubos, incluye hipótesis simplificadoras en sistemas complejos restándole eficiencia al sistema conjunto, etc.

b) Método de Características.

El método de características convierte las dos ecuaciones diferenciales parciales de continuidad y de movimiento en cuatro ecuaciones diferenciales totales. Se toma en cuenta totalmente la fricción, así como el efecto de la inclinación de los tubos. Las ecuaciones se expresan en forma de diferencias finitas sin omitir ningún término, ni efectuar hipótesis simplificadoras.

Las ventajas del método son las siguientes: exactitud de los resultados dado que no se omiten términos, facilidad en la manipulación de condiciones de frontera, facilidad en el planteamiento de sistemas complejos, resultados totalmente detallados. Además es más seguro porque encuentra las cargas y velocidades en muchos puntos a lo largo de las tuberías. Como el método generalmente se aplica en computadores, entonces es fácil cambiar cuantas veces quiera uno los efectos de cambios en los momentos de inercia de las partes rotatorias, tamaño de diámetros, espesores, formas de ataque, alturas de tanques y manejo de válvulas, además todo tipo de formas de control de transitorios como cámaras de aire, tanques de oscilación, válvulas de alivio, etc., colocadas

donde mejor convenga.

c) Método de Diferencias Finitas.

En lugar del método de características se puede utilizar algún método de diferencias finitas como el de Lax y Keller, que se basa en una transformación de las ecuaciones diferencias básicas a una forma de diferencias finitas según un esquema implícito.

Tiene las ventajas de que el intervalo de tiempo utilizado es arbitrario, la longitud de las secciones no depende del intervalo de tiempo, y de que tiene aplicaciones muy útiles cuando la celeridad o velocidad sónica en el agua es menor que la velocidad del agua.

Tiene las desventajas de que requiere de gran capacidad de memoria de la computadora usada y de que se necesitan plantear gran número de ecuaciones simultáneas, así como la de que depende en varios parámetros (como el de fijar el intervalo de tiempo) del criterio del analista.

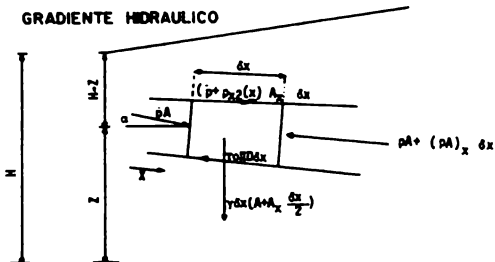
2.4 DESARROLLO DEL METODO DE CARACTERISTICAS

Dadas las ventajas de la aplicación del método de características se escogió este para ser utilizado en el análisis.

A continuación se desarrolla la parte teórica necesaria para el análisis.

2.4.1. ECUACIONES BASICAS PARA EL ANALISIS DE FLUJO INSTABLE EN CONDUCCIONES FORZADAS.

Las ecuaciones que describen el fenómeno transitorio son la ecuación de movimiento y la ecuación de continuidad. A continuación se presenta su desarrollo; basándose en la figura siguiente para la ecuación de movimiento:



La notación usada es la siguiente: suscritos en x y t indican diferenciación parcial.

$$p_x = \frac{\delta p}{\delta x}$$

De acuerdo a la figura, en la que se muestra un elemento de fluido dentro de un conducto sujeto a varias fuerzas que tienden a moverlo en la dirección x , que son la fuerza de presión en la parte aguas arriba, la fuerza de presión aguas abajo, la fuerza en el fluido debida a el incremento de área del conducto, la componente del peso del elemento en la dirección x , y la fuerza

de fricción por cortante en la pared del conducto que presenta resistencia al movimiento, podemos escribir la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 pA - (pA)_x \delta x + (p + p_x \frac{\delta x}{x}) A_x \delta x \\
 + \gamma \delta x (A + \frac{A_x}{x} \delta x) \text{ seno} - \tau_0 \pi D \delta x \\
 = \frac{\gamma}{g} (A + A \frac{\delta x}{x}) \delta x \frac{dv}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{ec. 1}$$

Ecuación de movimiento

Simplificando:

$$\frac{Px}{\rho} - g \text{ seno} + \frac{4\tau_0}{\rho D} + \frac{dv}{dt} = 0
 \tag{ec. 2}$$

De la figura: (Dado que ρ cambia muy poco comparada con H)

$$\begin{aligned}
 p &= \rho g (H - Z) \\
 p_x &= \rho g (H_x - Z_x) = \rho g (H_x + \text{seno})
 \end{aligned}
 \tag{ec. 3}$$

Sustituyendo

$$gH_x + \frac{4\tau_0}{\rho D} + \frac{dv}{dt} = 0
 \tag{ec. 4}$$

Si tomamos el esfuerzo cortante τ_0 como el esfuerzo cortante de estado estable, entonces :

$$\tau_0 = \frac{\rho f v^2}{8}
 \tag{ec. 5}$$

f = factor de fricción de Darcy Weisbach, ref. 2

Sustituyendo v y $v = VV_x + V_t = \frac{dy}{dt}$ en la ec. 4

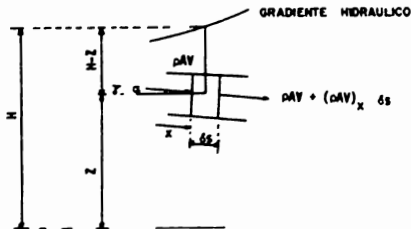
$$\rho V_x + V V_x + V_t + f \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad \text{ec. 6}$$

Esta es la ecuación de movimiento en la forma que se utilizará de aquí en adelante en nuestros análisis. En el término de fricción el valor absoluto ha sido introducido para indicar que la fuerza de fricción se opone a la dirección de la velocidad.

La ecuación de movimiento anterior es válida para conductos a cualquier inclinación, curvos o rectos, poco a muy deformables y solo tiene como restricción que se usó equilibrio unidimensional.

Basándose en la figura siguiente se desarrolla la ecuación de continuidad para tubos ligeramente deformables. Este desarrollo es válido para cualquier material que se comporte de una forma elástica y tenga deformaciones pequeñas, también que el fluido tiene cambios pequeños en su densidad.

Los términos son los mismos que en la figura anterior.



Si tomamos un elemento diferencial en el conducto y consideramos éste definido por dos marcas circulares en su interior, consideremos el espacio entre las marcas para la aplicación del principio de continuidad. Dado que el tubo puede deformarse axialmente, la distancia δs entre secciones es una variable y es función del tiempo, el flujo neto por unidad de tiempo en el espacio que seleccionamos debe ser igual al incremento de masa dentro del espacio en igual tiempo, de donde:

$$\rho A V - (\rho A V + (\rho A V)_x \delta s) = (\rho A \delta s)_t \quad \text{ec. 7}$$

Dividiendo ésta expresión por la masa $\rho A \delta s$ y expandiéndola:

$$\frac{V}{\rho} \rho_x + \frac{\rho t}{\rho} + \frac{V}{A} A_x + \frac{A_t}{A} + \frac{(\delta s)_t}{\delta s} + V_x = 0 \quad \text{ec. 8}$$

Tomando en cuenta que las derivadas totales $\dot{\rho}$ y \dot{A} están dadas por: (respecto al tiempo y a x).

$$\dot{\rho} = V \rho_x + \rho_t \quad \text{ec. 9}$$

$$\dot{A} = V A_x + A_t \quad \text{ec. 10}$$

Siguiendo el flujo del líquido. Sustituyendo la ecuación de continuidad se tiene:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{(\delta s)_t}{\delta s} + V_x = 0 \quad \text{ec. 11}$$

En esta ecuación el primer término toma en cuenta la compresibilidad del líquido, el segundo toma en cuenta el cambio en las dimensiones del conducto y el tercero la posible elongación del conducto. El último término toma en cuenta el cambio entre el flujo de entrada y salida en un instante dado.

2.4.2. CALCULO DE LA CELERIDAD PARA LAS TUBERIAS DEL SISTEMA.

Si se define el módulo de elasticidad k del agua como:

$$k = \frac{\delta}{\delta/D} \quad \text{ec. 12}$$

Entonces:

$$\frac{\delta}{\delta} = \frac{\delta}{k} \quad \text{ec. 13}$$

Usando la razón de Poisson definida como:

$$\mu = - \frac{\text{deformación lateral unitaria}}{\text{deformación axial unitaria}} = - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

(Las variables son las mismas del párrafo anterior).

Entonces:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{4}{\pi D^2} \cdot \nu D \dot{\epsilon}_2 \quad \frac{D}{2} = 2 \dot{\epsilon}_2 = \frac{2}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \quad \text{ec. 15}$$

E = Módulo de elasticidad del material.

σ_1, σ_2 = Esfuerzo lateral y esfuerzo axial.

El tercer término se puede desarrollar como:

$$\frac{\dot{\delta}l}{\delta s} = \frac{1}{\delta s} \dot{c}_1 \delta s = \dot{c}_1 = \frac{1}{L} (\dot{\sigma}_1 - \omega \dot{\sigma}_2) \quad \text{ec. 16}$$

Combinando estas expresiones:

$$Vx + \frac{\dot{\rho}}{k} + \frac{1}{L} (\dot{\sigma}_2 (2-u) + \dot{\sigma}_1 (1-2u)) = 0 \quad \text{ec. 17}$$

En general la ecuación 17 puede transformarse a la forma:

$$Vx + \frac{\dot{\rho}}{k} + \frac{1}{L} \left(1 + \frac{k}{E} \frac{D}{\theta} c_1\right) = 0 \quad \text{ec. 18}$$

en que c_1 es función de las restricciones a las deformaciones a que está sometido el conducto.

De esta forma definiendo "a" como:

$$a = \sqrt{\frac{k/\rho}{1 + (k/E)(D/\theta)c_1}} \quad \text{ec. 19}$$

y sustituyendo en la ec. 18

$$Vx + \frac{\dot{\rho}}{\rho a^2} = 0 \quad \text{ec. 20}$$

expandiendo $\dot{\rho}$ utilizando la expresión 3, entonces

$$\dot{\rho} = V\rho_x + \rho_c = V\rho g (\sin \alpha + \cos \alpha) + \rho g H_c \quad \text{ec. 21}$$

sustituyendo esta en la ec. 20, queda:

$$\frac{a^2}{g} Vx + V (Rx + \text{seno}) + H_c = 0 \quad \text{ec. 22}$$

Esta ecuación es la ecuación de continuidad para tuberías con deformaciones pequeñas. La ecuación 19 nos define el término "a" conocido como celeridad, es decir la velocidad sónica en el agua para este caso:

Como se puede apreciar, la celeridad "a" depende de:

K = módulo de elasticidad del agua

ρ = densidad del agua

E = módulo de elasticidad del material del conducto

D = diámetro del conducto

e = espesor del conducto

C₁ = término que nos define las condiciones de deformaciones y esfuerzos permitidos en el conducto.

En el caso especial de túneles excavados en roca, revestidos y con blindaje de acero la ecuación 19 toma la forma

$$a = \sqrt{\frac{k/\rho}{1 + \left(\frac{k}{E}\right)\left(\frac{2R}{e}\right)(1-c)}} 2R_1 \quad \text{ec. 24}$$

en que

$$c = \frac{R_1/e}{\frac{R_1}{e} + \frac{E}{Ec} \frac{R_1^2 R_2^2}{2R_1 R_2} + \frac{E}{Er} (1 + \mu)} \quad \text{ec. 24}$$

Siendo cada término, lo siguiente de acuerdo a la figura

K = módulo de elasticidad del agua

E_c = módulo de elasticidad del concreto

E_r = módulo de elasticidad de la roca

E = módulo de elasticidad de la camisa de acero

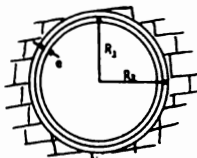
e = espesor de la camisa de acero

E = módulo de elasticidad de la camisa de acero

e = espesor de la camisa de acero (m)

R_1 y R_2 = radios interior y exterior del revestimiento de concreto (m)

ν = módulo de Poisson de la roca.



2.4.3 APLICACION DEL METODO DE CARACTERISTICAS A LAS ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y DE MOVIMIENTO.

a) El método de características se usa para transformar las ecuaciones diferenciales parciales que describen el fenómeno en cuatro ecuaciones diferenciales totales, las cuales son resueltas con técnicas de diferencias finitas de primer orden. Para facilitar su solución numérica ordenada se adopta el sistema de intervalos específicos de tiempo. (siendo éste aplicado a lo largo del desarrollo).

Las ecuaciones de continuidad y movimiento desarrolladas sin despreciar absolutamente ningún término quedaron reducidas a :

$$gH_x + VV_x + V_t + \frac{rV}{2D} V = 0 = L_1 \text{ movimiento} \quad \text{ec. 31}$$

$$H_t + \frac{a^2}{g} V_x + V H_x + V \text{sen} \alpha = 0 = L_2 \text{ continuidad} \quad \text{ec. 32}$$

Estas ecuaciones sirven para casos totalmente generales, aunque son susceptibles de simplificarse para casos especiales:

- 1) Cuando la tubería es horizontal

$$\text{sen} \alpha = 0$$

- 2) Cuando los efectos correctivos $V V_x$ y $V H_x$ son pequeños (acero y concreto) se pueden despreciar.

Las ecuaciones 31 y 32 forman un par de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas cuasi-lineales en términos de dos variables dependientes, velocidad y carga y dos independientes: distancia a lo largo del tubo y el tiempo: éstas se convierten en cuatro ecuaciones diferenciales totales por el método de características (refs. 4).

Cuando el cálculo de transitorios vá a ser hecho en sistemas de tuberías que contengan varios tipos de tubos es esencial que el intervalo de tiempo sea el mismo para todos los tubos. Es necesario entonces que las condiciones en los extremos de los tubos que con combíen a varios tubos se puedan obtener de ecuaciones simultáneas y esto se consigue considerando intervalos específicos de tiempo lo que implica interpolaciones en los valores obtenidos.

Las ecuaciones generales cuando se combinan con un multiplicador λ nos dan:

$$\begin{aligned} L_1 + \lambda L_2 &= \lambda(H_x(V + \frac{g}{\lambda}) + H_t) \\ &+ V_x(V + \frac{g}{\lambda}) + V_t \\ &+ \lambda V \text{sen} \alpha + r \frac{V|V|}{2D} = 0 \end{aligned} \quad \text{ec. 33}$$

Si

$$\frac{dx}{dt} = v + \frac{g}{\lambda} \cdot v + \frac{a^2}{g} \lambda \quad \text{ec. 34}$$

Entonces la ec. 33 se transforma en la ecuación diferencial ordinaria.

$$\lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \lambda v \operatorname{sen} \alpha + r \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad \text{ec. 35}$$

En este caso el multiplicador λ toma los valores

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad \text{ec. 36}$$

Sustituyendo en 34

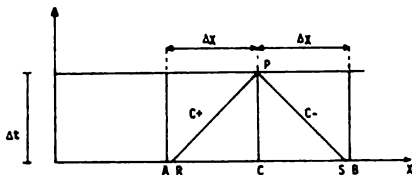
$$\frac{dx}{dt} = v \pm a \quad \text{ec. 37}$$

Las ecs. 37 representan las condiciones impuestas sobre la ec. 35. De aquí, las cuatro ecuaciones se obtienen tomando respectivamente los signos positivo y negativo de las ecuaciones 36 y sustituyendo en las ecs. 35 y 34.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Con } \lambda = \frac{g}{a} \\ \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{g}{a} v \operatorname{sen} \alpha + r \frac{v|v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v + a \end{array} \right\} C^+ \quad \text{ecs. 38}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Con } \lambda = -\frac{g}{a} \\ -\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dv}{dt} - \frac{g}{a} v \operatorname{sen} \alpha + r \frac{v|v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v - a \end{array} \right\} C^- \quad \text{ecs. 39}$$

Gráficamente estas ecuaciones se pueden representar de la forma siguiente:



En la figura anterior se aprecia claramente que la velocidad y la carga en P a un tiempo $t + \Delta t$ dependen de los puntos R y S a un tiempo t los puntos R y S son interpolados dado que se desea tener un Δt siempre fijo (intervalos específicos).

Aplicando el método de diferencias finitas a las ecuaciones 38 y 39 se llega a las siguientes expresiones:

$$c^+ \left\{ \begin{array}{l} v_p - v_R + \frac{\Delta}{8} (M_p - M_R) + \frac{\Delta}{8} v_R \operatorname{sen} \alpha (t_p - t_R) \\ + \frac{f}{2D} v_R |v_R| (t_p - t_R) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ec. 40}$$

$$x_p - x_R = (v_R + a) (t_p - t_R) \quad \text{ec. 41}$$

$$C = \begin{cases} V_p - V_s - \frac{g}{a} (H_p - H_s) - \frac{g}{a} V_s \operatorname{sen} \alpha (t_p - t_s) \\ \quad + \frac{f}{2g} V_s |V_s| (t_p - t_s) = 0 & \text{ec. 42} \\ x_p - x_s = (V_s - a) (t_p - t_s) & \text{ec. 43} \end{cases}$$

Como se ve estas ecuaciones tienen como variables dependientes V_p y H_p y como variables independientes V_R , H_R , y H_S que son valores que se interpolan entre los valores de V_A , H_A , V_C , H_C , V_B y H_B que son conocidos al tiempo t .

La interpolación la se hace tomando la figura como base y con las ecs. 41 y 43, se llega a las siguientes expresiones:

$$V_R = V_C - \theta a (V_C - V_A) \quad \text{ec. 44}$$

$$V_S = V_C - \theta a (V_C - V_B) \quad \text{ec. 45}$$

$$H_R = H_C - \theta a (H_C - H_A) \quad \text{ec. 46}$$

$$H_S = H_C - \theta a (H_C - H_B) \quad \text{ec. 47}$$

donde:

$$\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{ec. 48}$$

si

$$t_p - t_R = \Delta t \quad \text{ec. 49}$$

Con estas ecs. y con las ecs. 40 y 42 se puede despejar los valores de V_p y H_p que son los siguientes:

$$V_p = 0.5 \left[\sqrt{V_R + V_S + \frac{a}{g} (H_R - H_S) - \frac{a}{g} \Delta t \operatorname{seno} (V_R - V_S)} - \frac{f \Delta t}{2D} (V_R | V_R | + V_S | V_S |) \right] \quad \text{ec. 50}$$

$$H_p = 0.5 \left[H_R + H_S + \frac{a}{g} (V_R - V_S) - \Delta t \operatorname{seno} (V_R - V_S) - \frac{a}{g} \frac{f \Delta t}{2D} (V_R | V_R | - V_S | V_S |) \right] \quad \text{ec. 51}$$

Se debe hacer hincapié en que hay una restricción en la selección de $\theta = \Delta t / \Delta x$, porque para asegurar la estabilidad y la convergencia del método es necesario que $\Delta t(v + a) \leq \Delta x$, esto es que las características C^+ y C^- que pasan por P no deben caer fuera del segmento AB.

Cuando hay sistemas complejos con varios tubos, etc., es necesario escoger Δt con buen juicio para hacerlo compatible con todos los tramos. Para esto hay que escoger Δx para cada tramo, y como $\Delta x = L/N$ donde N = número de secciones en el tramo y L = longitud del tramo, entonces según la condición.

$$\Delta x \leq \Delta t (v + a) \quad \text{ec. 52}$$

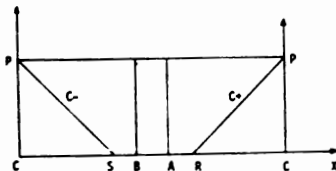
hay que escoger el número de secciones de forma tal que se cumpla siempre la ecuación 52.

Las ecs. 44, 45, 46, 47 nos dan los valores V_R , V_S , H_S , H_R con los cuales se puede mediante las ecs. 50 y 51 calcular los valores de H_p y V_p a un tiempo $t + \Delta t$. Las ecuaciones 44, 45, 46 y 47 se evalúan

con los valores conocidos en t . Los valores de H_p y V_p se pueden calcular en todas las secciones de un tramo que tenga características semejantes de diámetro, inclinación, espesor, etc. Si un tramo tiene características diferentes entonces se tiene que dividir en los tramos necesarios que tengan las mismas características.

Hay sistemas complejos que se pueden calcular con las ecuaciones características claramente establecidas, para esto, se tiene que establecer el concepto de frontera. De acuerdo a lo anteriormente visto, un tubo que tiene características uniformes puede considerarse un tramo y las ecuaciones anteriores se aplican directamente al cálculo de las velocidades y cargas en cualquiera de sus secciones, excepto en sus extremos puesto que éstos están influidos por condiciones diferentes de otros tramos (fronteras internas) o por fronteras externas al sistema como pueden ser depósitos, plantas de bombeo, etc. que en sistemas muy completos también pueden ser fronteras internas.

b) En casos de fronteras internas es conveniente tener las expresiones 40 y 42 expresadas en una forma más sencilla, esto se puede lograr de acuerdo a la figura siguiente:



Suponiendo que el punto C está en el extremo aguas arriba, su velocidad y carga tienen que cumplir la ecuación 42 de C⁻.

$$V_p - V_s - \frac{g}{8} (H_p - H_s) - \frac{g}{8} V_s \Delta t \operatorname{sen} \alpha + \frac{f}{2D} V_s |V_s| \Delta t = 0 \quad \text{ec. 53}$$

Reacomodando términos:

$$V_p = V_s + \frac{g}{8} (V_s \Delta t \operatorname{sen} \alpha - H_s) - \frac{f}{2D} V_s |V_s| \Delta t + \frac{g}{8} H_p \quad \text{ec. 54}$$

Dado que todos los términos son conocidos excepto V_p y H_p entonces:

$$V_p = C_1 + C_2 H_p \quad \text{ec. 55}$$

En forma similar se puede desarrollar la ecuación 40 para llegar a la expresión que tiene que ser cumplida por la carga y la velocidad en el extremo aguas abajo del tramo considerado.

Con la ecuación C⁺ (40)

$$V_p - V_R + \frac{g}{8} (H_p - H_R) + \frac{g}{8} V_R \Delta t \operatorname{sen} \alpha + \frac{f}{2D} V_R |V_R| \Delta t = 0 \quad \text{ec. 56}$$

De aquí:

$$V_p = V_R - \frac{g}{8} (H_p - H_R) - \frac{g}{8} V_R \Delta t \operatorname{sen} \alpha - \frac{f}{2D} V_R |V_R| \Delta t \quad \text{ec. 57}$$

Similarmente a la ec. anterior:

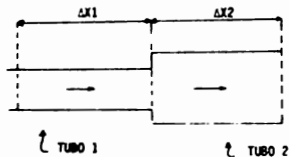
$$V_p = C_3 - C_4 H_p \quad \text{ec. 58}$$

En la ec. 58, C_3 y C_4 son constantes para los cálculos en cada incremento de tiempo.

Las ecuaciones 55 y 58 se pueden analizar para resolver varios casos de fronteras, ya sea utilizándolas juntas o separadas según el caso que se plantee, ya que dan una ecuación que deba ser cumplida cualquiera que sean las condiciones de la frontera. Con estas ecuaciones se puede pasar a estudiar una serie de fronteras que nos serán útiles al simular sistemas complejos de tuberías.

Conexión de tubos en serie:

Este tipo de frontera que se muestra en la figura como un cambio de diámetro, se aplica igualmente a tubos con el mismo diámetro pero con un cambio en la rugosidad, la pendiente, el espesor, o alguna restricción similar o una combinación de ellas.



Para esta frontera se cuenta con la ec. 55 aplicada al tubo 2, con la ec. 58 aplicada al tubo 1, con la condición de continuidad que establece $\Delta Q = 0$ en la unión, y la condición de una carga única en la junta.

$$V_{p1} = C_2 - C_1 \quad H_{p1} \quad \text{ec. 59}$$

$$V_{p2} = C_1 + C_2 \quad H_{p2} \quad \text{ec. 60}$$

$$V_{p1} A = V_p A \quad \text{ec. 61}$$

$$H_p = H_{p1} = H_{p2} \quad \text{ec. 62}$$

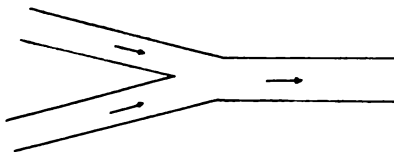
Como se observa, se cuenta con cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que se pueden resolver simultáneamente, llegando a la siguiente expresión:

$$H_p = \frac{C_2 A_1 - C_1 A_2}{C_1 A_1 + C_2 A_2} \quad \text{ec. 63}$$

Ya conocida la carga común se puede aplicar las ecuaciones 59 y 60 para conocer las velocidades a ambos lados de la junta.

Conexión de tubos paralelos

Para una conexión en paralelo como la de la figura, se cuenta con 5 ecuaciones.



Que son:

- 1) Continuidad
- 2) Carga común a todos los tubos en P.
- 3) Ec. 58 aplicada al tubo 1
- 4) Ec. 55 aplicada al tubo 2
- 5) Ec. 55 aplicada al tubo 3

Desarrollando estas ecuaciones se llega a establecer:

$$V_{p1} A_1 = V_{p2} A_2 + V_{p3} A_3 \quad \text{ec. 64}$$

$$H_{p1} = H_{p2} = H_{p3} = H_p \quad \text{ec. 65}$$

$$V_{p1} = C_3 - C_5 H_p \quad \text{ec. 66}$$

$$V_{p2} = C_1 + C_2 H_p \quad \text{ec. 67}$$

$$V_{p3} = C_5 + C_6 H_p \quad \text{ec. 68}$$

Los valores de C_5 y C_6 son similares a C_1 y C_2 sólo que se denominan así para diferenciarlos.

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente se llega a:

$$H_p = \frac{C_3 A_1 - C_1 A_2 - C_3 A_3}{C_5 A_1 + C_2 A_2 + C_6 A_3}$$

Con H_p conocida se puede aplicar las ecs. 66, 67, 68 para conocer los valores de V_{p1} , V_{p2} y V_{p3} .

Depósito como frontera.

Aguas arriba o aguas abajo, con nivel fijo o variable en el tiempo.

De acuerdo a la figura anterior se puede aplicar la ecuación 55 al tubo 1.

$$V_{p_1} = C_1 + C_2 H_{p_1} \quad \text{ec. 70}$$

Y considerar que la altura del depósito H_p es fija y por lo tanto:

$$H_p = H_{p_1} \quad \text{ec. 71}$$

Con lo que podemos conocer el valor de V_{p_1} .

Si el nivel de el tanque cambia con el tiempo, entonces lo único que hay que variar es el cálculo de H_{p_1} , de acuerdo al tiempo de que se trate y la ec. 70 no cambia.

En el caso de un depósito aguas abajo solo cambia el uso de la ec. 58 en lugar de la ec. 55.

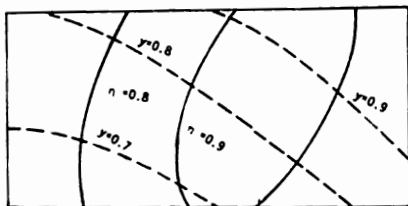
$$V_{p_1} = C_3 - C_4 H_{p_1} \quad \text{ec. 72}$$



Curvas características de las turbinas.

Normalmente las curvas características de las turbinas son proporcionadas por los fabricantes en forma gráfica y en los llamados diagramas Hill o de "Colina" por su similitud a las líneas, topográficas de nivel, tal cual se aprecia en la figura, que es una zona de diagrama Hill.

$h = \frac{H}{H_R}$ = porcentaje de la carga de diseño.



$$v = \frac{Q}{Q_R} = \text{porcentaje de la descarga de diseño}$$

en que n es la eficiencia y " y " es el grado de apertura de los álabes del distribuidor de la turbina (varía entre 0.0 y 1.0).

En este caso se representan las curvas de " y " y n , con h y v y en los ejes coordenados, pero también los fabricantes suelen representar estas curvas con N_s y Q_s en los ejes coordenados, que son velocidad específica y gasto específico respectivamente y también con h y p siendo p el porcentaje de la potencia de diseño.

A efectos de simplificar la manipulación de estas curvas en la utilización de computadores, se recurre a la teoría homóloga, utilizando las siguientes relaciones adimensionales.

$$\frac{h}{a^2 + v^2} \text{ vs } \tan^{-1} v/a \text{ y } \frac{\beta}{a^2 + v^2} \text{ vs } \tan^{-1} v/a$$

Utilizando estas relaciones homólogas, las curvas se procesan y transforman mediante el siguiente proceso.

- a) Se escoge una curva $Y = Y_1$ y se determinan varios puntos sobre esa curva.
- b) Cada punto tiene asociado valores de v , h y η , los cuales se van tabulando, por ejemplo para la curva $y = 0.2$

y	η	γ	h
0.2	0.70	0.206	0.857
0.2	0.71	0.211	0.881
0.2	0.72	0.220	0.908
-	-	-	-
0.2	0.72	0.305	1.225

- c) Se considera $\alpha = 1$, puesto que en operación normal la velocidad angular es constante.
- d) Se calcula para cada punto

$$\beta = \frac{T}{T_R} = \frac{v\eta n}{\eta_R} \quad \eta_R = \text{eficiencia de diseño.}$$

$$Mh(x) = \frac{h}{a^2 + v^2} = f_1(x)$$

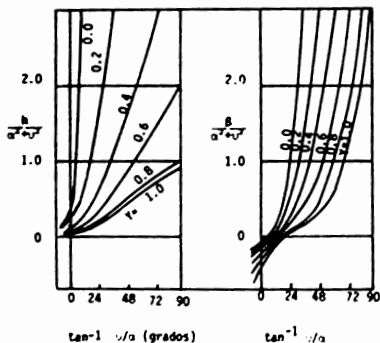
$$x = \tan^{-1} v/a$$

$$M\beta(x) = \frac{\beta}{x^2 + v^2} = f_2(x)$$

Estos valores se tabulan a continuación de los valores de n , v y h ya tabulados, como se ejemplifica a continuación:

y	n	v	h	β	MH	MB	$x = \tan^{-1} u/a$ grados
0.2	0.70	0.206	0.857	0.140	0.822	0.135	11.640

- e) Se grafican estos valores así obtenidos, con MH(x) vs $\tan^{-1} u/a$ y MB(x) vs $\tan^{-1} u/a$, lo que nos da dos curvas (una de MH y otra de MB) correspondientes a $y = y_i$.
- f) Se repite la operación para las demás curvas y , hasta obtener las curvas MH y MB correspondientes a las distintas curvas y . Las curvas obtenidas de MH y MB son de la forma mostrada en la figura siguiente:



Una vez obtenidas estas curvas, se pueden leer los valores de $MH(x)$ y $MB(x)$ para intervalos ΔX específicos.

Si se le proporcionan a una computadora estos valores en forma vectorial $MH(Y_i, \Delta X)$, se pueden calcular los valores de H y T para valores de α y v mediante interpolaciones en base a los valores conocidos de $MH(x)$ y $MB(x)$.

De esta forma para cualquier valor de v y α a un tiempo t , se tiene:

$$H = H_R h = H_R (\alpha^2 + v^2)^{-1/2} f_1 (\tan^{-1} v/\alpha)$$

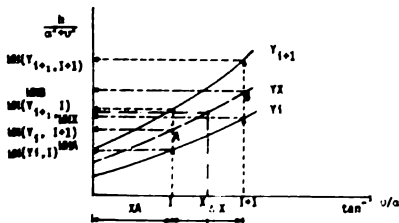
$$T = T_R \delta = T_R (\alpha^2 + v^2)^{-1/2} f_2 (\tan^{-1} v/\alpha)$$

El método de interpolación es en forma muy general como se describe a continuación:

Los valores interpolados se encuentran dentro de unas ecuaciones que llamaremos F_1 , F_2 y F_3 las cuales se detallan más adelante.

A un tiempo $T = \Delta T$ determinado se estima $X = \tan^{-1} v/\alpha$ con estimaciones de v y α al tiempo t .

Se obtienen los puntos conocidos adyacentes al valor obtenido de X (I e $I + 1$), como se aprecia en la figura.



Es de interés encontrar MIX , es decir el valor de $MH=f_1(x)$ con $F_1(x) = \frac{h}{\alpha^2 + v^2}$, para lo cual debemos encontrar los valores de MHA y MHB e interpolar entre ellos el valor de MIX .

Con la estimación de Yx , obtenida de Y al tiempo t , se puede definir

$$CJ = \frac{Yx - YI}{YI + 1 + YI}$$

$$MHA = MH(YI, I) + CJ(MH(YI + 1, I) - MH(YI, I))$$

$$MHB = MH(YI, I + 1) + CJ(MH(YI + 1, I + 1) - MH(YI, I + 1))$$

Con estos dos puntos, se interpola el valor de MIX , pasando una recta por los puntos A y B de la figura. Esta recta está dada por la ecuación.

$$f_1(x) = A_0 + A_1 X \quad \text{y obtener } H = H_R (\alpha^2 + v^2) f_1(x)$$

en que

$$A = \frac{MHB - MHA}{\Delta X}$$

y $A_0 = MHA - A \cdot X_A$

Análogamente se puede interpolar el valor de MBX , es decir el valor de $MB(x) = \frac{g}{\alpha^2 + v^2}$ para α y v y llegar a determinar la ecuación

$$f_2(x) = B_0 + B_1 X$$

y obtener $T = T_R (\alpha^2 + v^2) f_2(x)$

en que $B_1 = \frac{MBB - MBA}{\Delta x}$

$$B_0 = MBA - B_1 \cdot X_B$$

Estos valores de H y T se utilizan en las ecuaciones F_1 , F_2 y F_3 , obteniéndose al resolverse las ecuaciones nuevos valores de Y , α y u , repitiéndose todo el proceso en forma iterativa hasta que dichos valores converjan con una tolerancia determinada.

Se deducirá a continuación la ecuación del gobernador de la turbina.

ECUACIONES DE LA TURBINA Y EL GOBERNADOR.

Siempre que ocurre un cambio en la potencia demandada por un sistema eléctrico, hay un nivel diferente de potencia absorbida por el generador y aparece un par torsional sin balancear en la turbina, que origina un cambio positivo en la velocidad. La ec. que describe este cambio es

$$T_n = I \frac{d\omega}{dt}$$

en donde T_n es el par torsional neto aplicado a la unidad, $d\omega/dt$ es la aceleración angular e I es el momento polar de inercia de las partes mecánicas rotantes de la combinación turbina-generador y el fluido contenido en ellas ($I = WR^2/g$, donde W =peso, R =radio de giro).

La ec. anterior puede ser escrita en términos de la potencia producida por la turbina, $P = \eta QHn$ (η es la eficiencia de la turbina), y la potencia absorbida por el generador P_G .

$$P - P_G = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

La potencia de operación P_o es aquella asociada con el gasto carga máxima $P_o = T_{o\omega} = Q_o H n$ y Dividiendo por $T_{o\omega}$, donde $\alpha = \omega/\omega_o$ y es la relación adimensional de la velocidad. Así tenemos:

$$T_n \frac{d\alpha}{dt} = \beta - \frac{P_G}{P_{o\alpha}}$$

donde δ es la relación adimensional del par torsional, T/T_0 , y T_m es el tiempo mecánico de arranque, definido como

$$T_m = \frac{I \omega_0}{P_0}$$

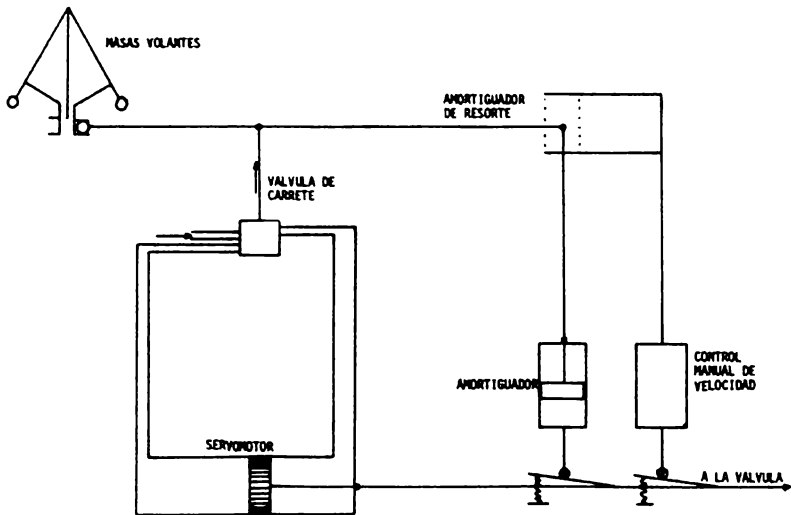
puede interpretarse como el tiempo necesario para acelerar la unidad, a partir de cero hasta la velocidad normal de operación con el par torsional aplicado totalmente.

GOBERNADOR

El propósito del gobernador es proveer retroalimentación entre la potencia requerida por el sistema eléctrico y la potencia hidráulica, o bien, relacionando la velocidad de la turbina con la posición de los alabes. Se pueden aislar dos conceptos fundamentales: 1) el cambio de la velocidad de la turbina es controlado solamente por el par torsional neto en la unidad, 2) el cambio de velocidad, operado a través del gobernador, controla el servomotor principal. El servomotor principal es un dispositivo del sistema de gobierno que ajusta el mecanismo de control de la turbina, esto significa que controla la entrada de energía a la turbina. Este mecanismo puede ser una válvula de aguja, alabes directores, aletas del rodete o una combinación de estos y otros elementos.

Existen gobernadores de diferentes clases: normalmente existen sensores de velocidad o aceleración que detectan cualquier anomalía y entonces se procede a una acción correctiva.

La secuencia de eventos posteriores a un cambio en la velocidad es la siguiente. Los eventos descritos son el resultado de un cambio en el sistema que produce una elevación de la velocidad. La elevación de la velocidad en la turbina se transmite al volante (flyball mass) que produce un movimiento ascendente del collar. La palanca



ESQUEMA DEL SISTEMA DEL GOBERNADOR

gira alrededor de la posición neutral del amortiguador y levanta la válvula del rodete en el relevador. Un líquido de alta presión activa el servomotor y la válvula principal se cierra. A medida que se mueve el vástago de la válvula, el extremo derecho de la palanca baja, como resultado de una caída temporal y permanente de velocidad. Esto altera la válvula del relevador que a su vez detiene o actúa en reversa la carrera del servomotor. Durante esta secuencia el extremo derecho de la palanca es desplazado de su posición neutral. La válvula de aguja situada en el amortiguador controla la velocidad con que el resorte vuelve a su posición neutral. Durante la condición transitoria la válvula principal o el mecanismo de control del gobernador, el cual controla el flujo a través de la turbina está siendo ajustado. Las diferentes posiciones del gobernador junto con las características particulares del sistema determinan la estabilidad del mismo.

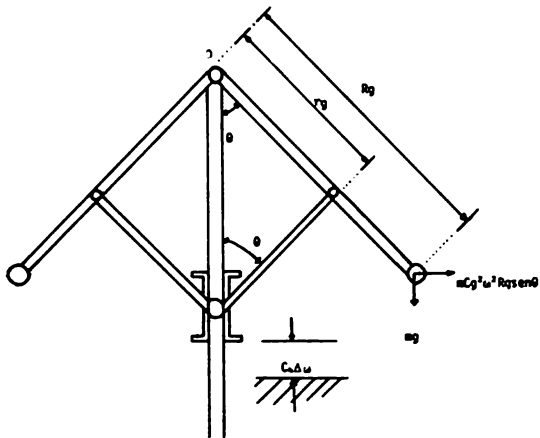
MASAS VOLANTES.

El desplazamiento del collar a partir del estado de reposo puede ser expresado en términos de la desviación de la velocidad a partir de la velocidad normal $\omega = \omega_0$. En la figura se supone que giran como se muestran, la fricción y la carga de gravedad se desprecian excepto en las masas del volante. Si ω_0 es la velocidad angular de las masas, entonces $\omega_0 = C\theta_0$ donde C es una constante. Tomando momentos con respecto a O .

$$M C \theta^2 \omega^2 R_0^2 \sin \theta \cos \theta = m g R_0 \sin \theta$$

simplificando

$$\cos \theta = \frac{m}{M C^2 \omega^2}$$



MASAS VOLANTES

y en condiciones de reposo

$$\cos \theta = \frac{g}{Rg \omega^2 Cg}$$

El desplazamiento del collar del gobernador a partir del reposo es

$$C_s (\omega - \omega_0) = 2rg (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \frac{2grg (\omega^2 - \omega_0^2)}{Rg Cg \omega^2 \omega_0^2} (\omega - \omega_0)$$

Donde los de velocidad son relativamente pequeños, linealizando el extremo derecho, produce

$$C_s = \frac{4grg}{Rg Cg \omega_0^2} = \frac{4rg}{\omega_0} \cos \theta_0$$

Así podemos expresar el desplazamiento del collar como $C_s \Delta \omega$.

SISTEMA DE PALANCA.

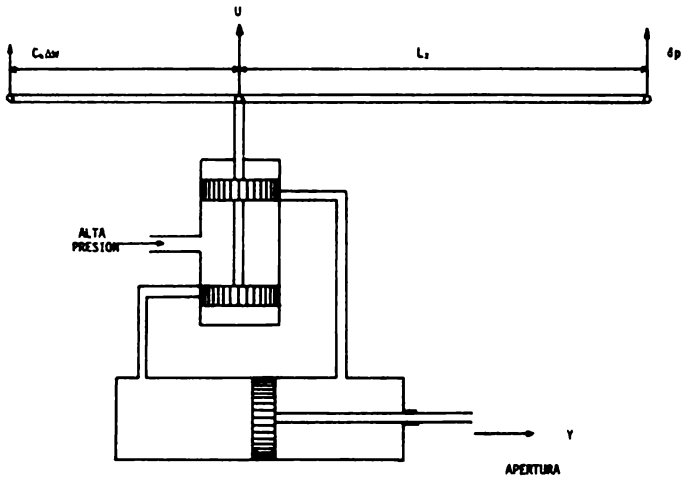
En la figura el sistema de palanca está aislado, tanto de la válvula del relevador como del servomotor principal. Se supone que cualquier movimiento de la válvula del relevador produce una respuesta instantánea del servomotor principal, esto significa que no hay ningún pistón traslapado del relevador. Si el desplazamiento de la válvula del rodete es U a partir de la posición cerrada, entonces

$$U = \delta p + \frac{L_1}{L_1 + L_2} (C_s \Delta \omega - \delta p)$$

donde δp es el desplazamiento del pistón del amortiguador a partir del estado de reposo, y L_1, L_2 las longitudes de la articulación.

Haciendo adimensional la ecuación y simplificando tenemos

$$u = \Delta \alpha + \frac{\delta p}{\delta p_0}$$



Válvula de carrete articulada a las masas volantes y al amortiguados

que es la ecuación que relaciona el movimiento del sistema, incluyendo la válvula del relevador, y el cambio relativo de la velocidad $S_1 \dot{q}_p = 0$ (un punto fijo). La ecuación sería

$$u = \Delta a$$

AMORTIGUADOR.

Para analizar el comportamiento del amortiguador dada una fuerza F en la varilla del pistón tenemos

$$F = K_s \zeta = (P_2 - P_1) A_p$$

en donde

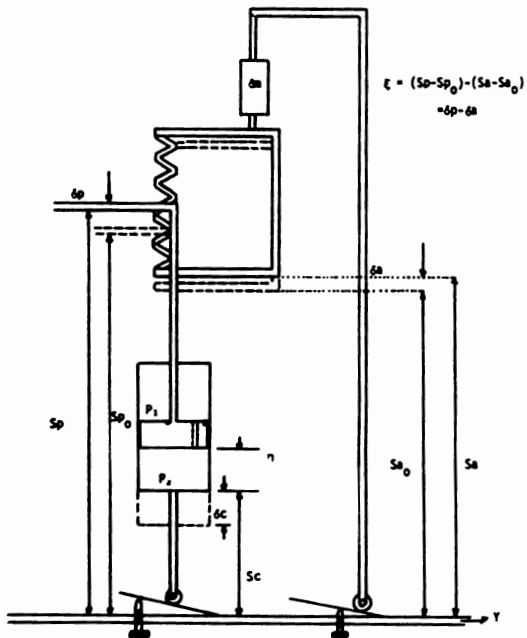
- A_p = área del pistón
- P_1, P_2 = presiones en el cilindro
- K_s = constante del resorte
- ζ = desplazamiento del resorte a partir de su posición neutral ($\dot{q}_p = 0$)

El flujo a través del pistón Q_p se supone laminar así

$$Q_p = \frac{C_u (P_2 - P_1) \pi D^4}{128 \mu l_0} = \dot{n} A_p$$

donde D - diámetro del orificio a través del pistón, l_0 - su longitud, μ - viscosidad, C_u - coeficiente de corrección debido a los efectos de tubo corto, y \dot{n} es la posición del pistón, entonces de las ecuaciones anteriores

$$-\dot{n} = -(\dot{q}_p - \dot{a}) = \frac{C_u K_s \pi D^4}{128 \mu l_0 A_p^2} (\dot{q}_p - \dot{a})$$



ENSAMBLE DEL AMORTIGUADOR

La constante de tiempo del amortiguador T_d se describe como el tiempo de relajación del amortiguador. Si el pistón es desplazado, δp , y el cilindro del amortiguador y el resorte permanecen fijos, $\delta c = \delta a = 0$ la ecuación anterior puede resolverse y

$$\delta p = \delta p_1 \exp \left[-t \left(\frac{C_v K_s \pi D^4}{128 \mu l_0 A_p^2} \right) \right]$$

La curva exponencial disminuye $\delta p/\delta p_1$, donde la constante del amortiguador se toma como el tiempo requerido por el pistón para regresar a su posición inicial

$$\delta p/\delta p_1 = 1/e = 0.367$$

Sin embargo T_d vale

$$T_d = \frac{128 \mu l_0 A_p^2}{C_v K_s \pi D^4}$$

La ecuación puede reescribirse para incluir la constante de tiempo definida y

$$-T_d (\delta p - \delta c) = \delta p - \delta a$$

CAIDA DE VELOCIDAD PERMANENTE Y TEMPORAL

La posición del cilindro del amortiguador es proporcional a Y

$$\delta c = C_1 (Y - Y_0)$$

Símbolamente la posición del armazón del amortiguador (control de caída permanente, está dada por:

$$\delta a = C_1 (Y - Y_0) - \delta m$$

donde δa es la variación del control manual de velocidad a partir del estado de reposo.

Una gráfica relacionando la velocidad relativa Δx contra la posición del servomotor principal Δy cuando el gobernador está en reposo en operación de equilibrio (figura). En estas condiciones de operación tenemos

$$\Delta a + \frac{AP}{\delta_D} = 0$$

que relaciona el movimiento del sistema de palanca con el cambio relativo de la velocidad. Si el amortiguador fuera removido del gobernador $\delta p = \delta a$ y las ecuaciones darían

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = - \frac{C_1 Y_0}{\delta_D} = - \sigma$$

Esta ecuación define la caída permanente de velocidad como la pendiente de la curva en un punto determinado quedando

$$\delta a / \delta_D = \sigma \Delta y$$

En forma similar la caída temporal de velocidad queda

$$\frac{\delta c}{\delta_D} = \delta \Delta y$$

CONSTANTE DE PRONTITUD.

La desviación de la velocidad, la velocidad del servomotor principal y la válvula del relevador están relacionados a través de esta constante.

Se supone que el cambio de posición Y del mecanismo de control es proporcional al desplazamiento de la válvula del rodete (tan pronto como la armadura de la válvula del relevador está completamente descubierta). Cuando esto ocurre el mecanismo de control se mueve a máxima velocidad $1/T_g$ donde T_g es el tiempo de cierre correspondiente a la velocidad máxima del servomotor. Fuera de este límite la ecuación que relaciona la velocidad del servomotor y el desplazamiento de la válvula del relevador es

$$\dot{\Delta y} = -C_2 U$$

en forma adimensional

$$\dot{\Delta y} = -\frac{C_2 R_{\text{servo}}}{Y_0} U$$

para el gobernador con caída temporal tenemos

$$\dot{\Delta y} = -\frac{C_2 R_{\text{servo}}}{Y_0} \Delta \alpha$$

que define la constante como

$$T_{\alpha} = \frac{Y_0}{C_2 R_{\text{servo}}} = -\frac{\Delta \alpha}{\Delta y}$$

Para el gobernador con caída temporal y amortiguador la constante es:

$$T_{\alpha}' = T_{\alpha} + \delta T_d$$

ECUACION DEL GOBERNADOR.

Las ecuaciones anteriores se combinan para producir una sola relación que describa la respuesta del gobernador. Eliminando el desplazamiento de la válvula del rodete y combinando el amortiguador con las relaciones de caída lo que elimina los parámetros δp , δa y δc , quedando

$$T_d T_a \ddot{\Delta y} + T_d \dot{\Delta y} + \sigma \Delta y = -\Delta a - T_d \ddot{\Delta a}$$

Esta ecuación relaciona los cambios de velocidad con la posición del mecanismo de control principal. En general $T \ll T_d$ por lo que la ecuación puede simplificarse

$$T_d \dot{\Delta y} + \sigma \Delta y = -\Delta a - T_d \dot{\Delta a}$$

Ecuaciones similares a estas son aplicables a otros sistemas de gobierno.

Deducción de las Ecuaciones.

Si tenemos una turbina, tal como se presenta en la figura, podemos plantear las siguientes ecuaciones.

a) Ecuaciones características en la conducción a presión

$$V_p = C_1 + C_2 H_p \quad \text{ec. a}_1$$

$$V_s = C_3 - C_4 H_s \quad \text{ec. a}_2$$

b) Ecuaciones características de carga y par torsional.

$$H_T = H_R (\alpha^2 + \nu^2) (A_0 + A_1 X) \quad \text{ec. b}_1$$

$$T = T_R (\alpha^2 + \nu^2) (B_0 + B_1 X) \quad \text{ec. b}_2$$

c) Ecuación de par torsional de la turbina.

$$\frac{T}{T_R} - \frac{P C_0}{\alpha} \frac{1}{V_{R=0}} = \frac{\omega R}{T_R} \frac{\omega R^2}{g} \frac{d\alpha}{dt} = T_m \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{ec. c}$$

d) Ecuación del gobernador

$$T_d T_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \alpha \frac{dy}{dt} + \sigma(y-1) + \alpha - 1 + T_d \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \text{ec. d}$$

Trabajando con estas ecuaciones se puede obtener las ecuaciones finales.

La ecuación de equilibrio de cargas es la siguiente

$$H_p = H_s - H_T$$

pero

$$H_p = \frac{V_p}{C_1} - \frac{C_2}{C_1}$$

$$H_s = \frac{C_3}{C_4} - \frac{V_s}{C_4}$$

reemplazando en la ecuación de equilibrio y combinando con la ecuación b₁, se obtiene

$$\frac{V_D}{C_T} - \frac{C_1}{C_T} = \frac{C_2}{C_A} - \frac{V_S}{C_A} - H_R (\alpha^2 + \nu^2) (A_0 + A_1 X)$$

ordenando se obtiene F₁

$$F_1 = \frac{V_D}{C_T} + \frac{V_S}{C_A} + H_R (\alpha^2 + \nu^2) (A_0 + A_1 X) - \frac{C_1}{C_T} - \frac{C_2}{C_A} = 0$$

Luego, expresando la ecuación de torque en la turbina (ecuación c) en diferencias finitas, recordando que $\beta = \frac{T}{r}$

$$\frac{\beta + \beta_0}{2} - \frac{1}{T_{R^2} \omega} \left[\frac{PG/\alpha + (PG/\alpha)_0}{2} \right] = T_m \frac{\alpha - \alpha_0}{\Delta t}$$

combinando con la ecuación b.2 y ordenando se tiene F₂

$$F_2 = (\alpha^2 + \nu^2) (B_0 + B_1 X) + \beta_0 - \frac{1}{T_{R^2} \omega} \left[\frac{PG}{\alpha} + \left(\frac{PG}{\alpha} \right)_0 \right] - \frac{2T_m}{\Delta t} (\alpha - \alpha_0) = 0$$

Finalmente expresando la ecuación del gobernador en diferencias finitas, se tiene F₃.

$$F_3 = 2 \left[\frac{Y - Y_0}{\Delta t} - Z_0 \right] + \frac{T' \alpha}{T \alpha T_d} (Y - Y_0) + \frac{\Delta t}{2T_d T \alpha} \left[\alpha(Y + Y_0 + 2) + \alpha_0 - 2 \right] + \frac{\alpha - \alpha_0}{T \alpha} = 0$$

Estas tres ecuaciones tienen tres incógnitas, que son α, v, Y y a su vez A_0, A_1, B_0 y B_1 , son función de α y v .

Se pueden resolver estas ecuaciones en forma iterativa y recurriendo a un método de resolución de ecuaciones no lineales que puede ser por ejemplo Newton-Raphson y que sería como se describe a continuación:

Trabajando con F_1, F_2 y F_3 se puede escribir

$$F_1 + a_{11} \Delta v + a_{12} \Delta \alpha + a_{13} \Delta Y = 0$$

$$F_2 + a_{21} \Delta v + a_{22} \Delta \alpha + a_{23} \Delta Y = 0 \quad \text{ec. f}$$

$$F_3 + a_{31} \Delta v + a_{32} \Delta \alpha + a_{33} \Delta Y = 0$$

en que

$$a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial v} \quad a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \quad a_{13} = \frac{\partial F_1}{\partial Y}$$

$$a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial v} \quad a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \quad a_{23} = \frac{\partial F_2}{\partial Y}$$

$$a_{31} = \frac{\partial F_3}{\partial v} \quad a_{32} = \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \quad a_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial Y}$$

Se calculan A_0, A_1, B_0 y B_1 , con los valores estimados de y, α y v (que son estimados de los valores de y, α y v al tiempo t) y se evalúan con todos estos valores $F_1, F_2, F_3, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$. De esta forma las ecuaciones (f), se transforman en ecuaciones lineales.

Se resuelven las ecuaciones (f) y se calculan nuevos valores de y, α y v que son los siguientes

$$a = a_{in} + \Delta a$$

$$v = v_{in} + \Delta v$$

$$y = y_{in} + \Delta y$$

en que el subíndice "in" indica que se refiere al valor con el que inició el cálculo.

El proceso se continúa hasta que Δy , Δx y Δv lleguen a ser menores que un valor de tolerancia.

Dado que $Q = v Q_r$

Se puede obtener
$$V_p = \frac{Q}{A_p} = \frac{VQ_r}{A_p}$$

$$V_s = \frac{Q}{A_s} = \frac{VQ_r}{A_s}$$

y encontrar con las ecuaciones a_1 y a_2

$$H_p = \frac{Q}{A_p C_2} - \frac{C_1}{C_2}$$

$$H_s = \frac{C_3}{C_4} - \frac{Q}{A_s C_4}$$

Siguiendo el mismo método, pueden analizarse varios casos, con dos o más turbinas, con tomas independientes o comunes, etc.

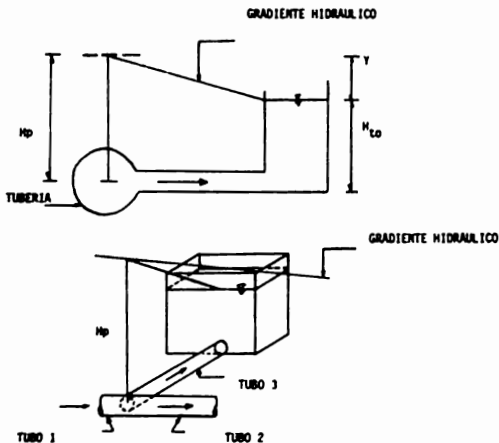
DISPOSITIVOS DE CONTROL DE GOLPE DE ARIETE.

Existen distintos dispositivos para el control del golpe de ariete en conducciones a presión. El más utilizado en túneles de presión son las torres de oscilación.

Las torres de oscilación son tanques abiertos (a superficie libre) y pueden tener variadas formas geométricas y distintas restricciones de pérdidas por fricción.

Se desarrollará a modo de ejemplo el análisis de una torre de oscilación simple, es decir de una torre de sección homogénea, conectada a la conexión por una tubería corta sin dispositivos especiales para provocar pérdidas en las oscilaciones.

Es claro que para cualquier torre de oscilación, cualquiera sea su geometría y las restricciones que se le impongan tanto en la conexión como en dispositivos para amortiguar las oscilaciones, se pueden deducir las ecuaciones que gobiernan su comportamiento.



Aplicando las ecuaciones 55 y 58 a los tubos 1 y 2.

$$Vp_1 = C_1 - C_2 H_p \quad \text{ec. 126}$$

$$Vp_2 = C_1 - C_2 H_p \quad \text{ec. 127}$$

La ecuación de continuidad:

$$Vp_1 A_1 + Vp_2 = Vp_2 A_2 \quad \text{ec. 128}$$

La condición de carga única en el punto P.

$$H_{p1} = H_{p2} = H_{p3} = H_p$$

Se procederá ahora a establecer las ecuaciones de continuidad y movimiento para el tramo 3, haciendo mención específica de que se emplea el método de diferencias finitas.

Ec. de movimiento en el tramo 3.

$$\gamma A_3 \gamma - CV_3/V_3 = \frac{A_3 L_3}{g} \frac{dV}{dt} \quad \text{ec. 130}$$

Ec. de continuidad para el tanque y el tramo 3.

$$- \frac{d H_t}{d t} A_{t0} = A_3 \left(\frac{Vp_1 + V_3}{2} \right) \quad \text{ec. 131}$$

Por diferencias finitas respecto al tiempo anteriores.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{Vp_1 + V_3}{\Delta t} \quad \text{ec. 132}$$

$$\frac{dH_t}{dt} = \frac{1}{\Delta t} (H_{t0} - H_{t00}) \quad \text{ec. 133}$$

$$\gamma = \frac{H_{t0} - H_p + H_{t00} - H_{p0}}{2} \quad \text{ec. 134}$$

Con las ecuaciones 131 y 133

$$-\frac{A_{to}}{\Delta t} (H_{to} - H_{too}) = A_2 \left(\frac{V_{p1} + V_1}{2} \right) \quad \text{ec. 135}$$

Con las ecuaciones 126, 127 y 128.

$$A_1 (C_1 - C_0 H_p) - A_2 (C_1 + C_2 H_p) = -A_1 V_{p1} \quad \text{ec. 136}$$

De aquí:

$$H_p = \frac{A_1 C_1 - A_2 C_1}{A_2 C_2 + A_1 C_0} + \frac{A_2}{A_2 C_2 + A_1 C_0} V_{p1} \quad \text{ec. 137}$$

Dado que todos los términos son conocidos, excepto H_p y V_{p1} , se puede escribir la ecuación 137 como:

$$H_p = C_0 + C_1 V_{p1}$$

Sustituyendo H_p en la ec. 134 e introduciendo ésta y la ec. 132, en la ec. 130, se obtiene la siguiente expresión, en la que la única incógnita es V_{p1} y H_{to} .

$$\frac{\Delta t}{L_s} \left[-\frac{C_2}{2} - \frac{C_3}{2} V_{p1} + \frac{H_{to} - H_{po} + H_{too}}{2} - CV_1/V_1 \right] = V_{p1} - V_1 \quad \text{ec. 139}$$

De la ec. 135 se puede despejar H_{to} .

$$H_{to} = H_{too} - \frac{\Delta t}{A_{to}} A_2 \left(\frac{V_{p1} + V_1}{2} \right) \quad \text{ec. 140}$$

y sustituyendo en la ec. 139

$$\frac{g\Delta t}{L_3} \left[-\frac{C_3}{2} - \frac{C_3}{2} V_{p2} + \frac{H_{t00} - H_{p0}}{2} + \frac{H_{t00}}{2} - \left[\frac{\Delta t}{A_{t0}} A_3 \left(\frac{V_{p1} + V_{p2}}{2} \right) \right] - CV_3/V_3 \right] = V_{p1} - V_3 \quad \text{ec. 141}$$

De aquí se puede despejar V_{p1}

$$V_{p1} = \frac{V_3 - \frac{g\Delta t}{L_3} \left[-\frac{C_3}{2} + \frac{H_{p0}}{2} - H_{t00} + \frac{A_3 \Delta t}{4 A_{t0}} V_3 - CV_3/V_3 \right]}{1 + \frac{g\Delta t}{2L_3} C_3 + \frac{g\Delta t^2 A_3}{4 L_3 A_{t0}}} \quad \text{ec. 142}$$

Con este valor de V_{p1} , se puede conocer el valor de H_p con la ec. 137 y con H_p todos los demás valores que se conocen como las velocidades V_{p1} y V_{p2} .

Las variables utilizadas son las siguientes:

V_{p1} = Velocidad en el tubo 1 al tiempo $t + \Delta t$.

V_{p2} = Velocidad en el tubo 2 al tiempo $t + \Delta t$.

V_{p3} = Velocidad en el tubo 3 al tiempo $t + \Delta t$.

H_p = Carga común para los tres tubos al tiempo $t + \Delta t$.

A_3 = Área tubo 3.

L_3 = Longitud tubo 3.

V_3 = Velocidad en el tubo 3 al tiempo t .

H_{t0} = Carga en el tanque el tiempo $t + \Delta t$.

H_{po} = Carga común al tiempo t .

H_{too} = Carga en el tanque al tiempo t .

A_{to} = Area tanque de oscilación.

Igualmente pueden analizarse otros dispositivos, como válvulas reguladoras de presión o similares, de tal forma pueden integrarse al modelo matemático todos los factores que puedan formar parte del sistema.

3. PROBLEMA DE APLICACION Y ALCANCE.

En este capítulo se analizará un esquema tipo de planta hidroeléctrica. Se determinará la necesidad de un pozo de oscilación y se dimensionará en forma preliminar.

Para cumplir con lo anterior se desarrolló un programa de computadora, basado en el método de las características, mismo que se describe en el capítulo anterior, que pueda simular el esquema propuesto.

La potencialidad del programa estriba en su flexibilidad para analizar diversos casos de operación y esquemas de plantas hidroeléctricas.

Los casos que puede analizar.

a) Operaciones normales

- 1 rechazo de carga
- 2 aceptación de carga.

b) Casos extremos producidos por la falla de gobernador en:

- 1 rechazo de carga
- 2 aceptación de carga.

El programa tal como se presenta aquí, es capaz de analizar, un esquema simple, esto es para una sola conducción y turbina; pero se puede ampliar al No. de turbinas, de túneles de presión, desfogues y No. de torres de oscilación que se tengan en un esquema dado.

3.1 APLICACION Y ALCANCE.

Se realizará el análisis de los fenómenos transitorios a nivel de factibilidad para el esquema seleccionado, que consiste en una obra de toma, conducción a presión, el conjunto turbina generador y el desfogue.

El problema requiere de la interacción de muchas ramas específicas de la Ingeniería y del criterio de sus especialistas. Dentro de las ramas de la Ingeniería podemos citar: la geología, la hidráulica, el diseño electromecánico, el estructural, etc.

Este ejemplo presenta solo un aspecto del problema ya que solo analiza la parte hidráulica; para poder realizar este análisis se ha requerido la colaboración de los otros equipos, ya que ellos han determinado los datos para este problema.

No está por demás recalcar que el problema requiere de la interacción de los grupos ya mencionados y que obliga en un proyecto determinado a un proceso de retroalimentación de cada una de las facetas que toman parte en el diseño, a fin de lograr el mejor proyecto posible.

El análisis consistirá en:

- a) Determinar las velocidades y presiones máximas y mínimas en el sistema, generadas en operaciones normales de aceptación y rechazo de carga.
- b) Determinar las velocidades y presiones máximas y mínimas en el sistema, generadas en operaciones en situaciones extremas, susceptibles de presentarse como son rechazo total de carga considerando la falla del sistema de control (gobernador).

3.2 DATOS DEL CASO ANALIZADO.

3.2.1 DATOS GEOMETRICOS.

Como ya se mencionó, el esquema seleccionado consta de un solo grupo turbina-generador.

Así que los datos geométricos del sistema son:

- a) Diámetros de los tramos de la conducción
- b) Longitudes de los tramos de la conducción
- c) Coeficiente de fricción en los tramos de la conducción
- d) Celeridad de la onda en los tramos de la conducción, que para su cálculo depende de las características físicas y de comportamiento de los materiales que intervienen (sección 2.4.2).

3.2.2. DATOS ELECTROMECAÑICOS.

- a) Datos del conjunto turbina-generador, como son: momento de inercia y par torsional del conjunto, carga de diseño, gasto de diseño y velocidad rotacional de la turbina.
- b) Se obtuvieron las curvas características para la turbina, definidas en función de su velocidad específica, en este caso Ns .
- c) Datos del gobernador de velocidad que incluyen las constantes de prontitud y del amortiguador, caídas permanentes y temporal de velocidad y el tiempo de cierre correspondiente a la máxima velocidad del servomotor.

3.3.3 CASOS ANALIZADOS.

Los casos analizados comprenden 2 grupos.

1 Sin torre de oscilación

- a) rechazo parcial de carga
- b) rechazo total de carga
- c) aceptación de carga
- d) rechazo total de carga con falla del sistema de control.

2 Con torre de oscilación

- a) rechazo parcial de carga
- b) rechazo total de carga
- c) aceptación de carga
- d) rechazo total de carga con falla del sistema de control.

3.4 RESULTADOS.

Los resultados se presentan a continuación en forma gráfica. Teniendo así la gráfica de presiones máximas y mínimas en el sistema durante las operaciones normales de rechazo y aceptación de carga y la situación extrema, así como las variaciones de los parámetros adimensionales carga, gasto, velocidad rotacional (*) y la relación de potencia generada y por último el grado de apertura de los álabes directores.

* El diseño de la torre se hizo en forma preliminar según el criterio de Thoma.

INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Como se puede observar en las gráficas 3.1.1 y 3.2.1, los aumentos de presión generados al producirse un rechazo de carga, producto de una baja en la demanda de energía eléctrica en los centros de consumo, alcanzan valores de 17 y 22 m respectivamente.

En las gráficas 3.1.2 y 3.2.2 se aprecia el funcionamiento del gobernador, el cual es inestable; por lo que se hace recomendable la inclusión de una torre de oscilación, aguas arriba de la turbina, de tal manera que proteja la tubería y permita al gobernador estabilizarse.

Para el caso de aceptación de carga, gráficas 3.3.1 y 3.3.2, el problema principal se debe a una disminución de carga, de 8 m, producto de un aumento en la demanda, lo que provoca la apertura de los álabes de distribuidor para obtener un mayor gasto que acelere la turbina, hasta alcanzar el nivel de energía demandado.

En condiciones de operación extremas, esto es, considerando el caso de la falla del gobernador en un rechazo de carga, los aumentos de presión son altos, pero se genera la aceleración de la turbina, ya que al establecerse el rechazo de carga sin el cierre de los álabes del distribuidor, el gasto que pasa es el mismo que en las condiciones anteriores al rechazo de carga, pero la resistencia que presenta el generador desaparece, provocando la aceleración de la turbina hasta alcanzar la velocidad de fuga o embalamiento de ésta. (Gráficas 3.4.1 y 3.4.2).

A diferencia de los casos anteriores, los siguientes consideran en el análisis una torre de oscilación aguas arriba de la turbina. En estos casos se puede observar el comportamiento estable del gobernador y la disminución de aumentos y caídas de presión.

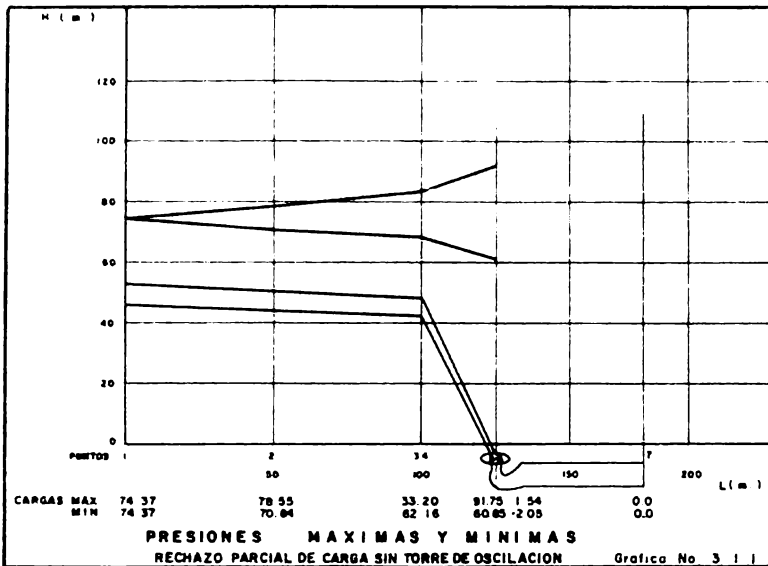
La torre de oscilación se dimensionó en forma preliminar, según el criterio de Thoma.

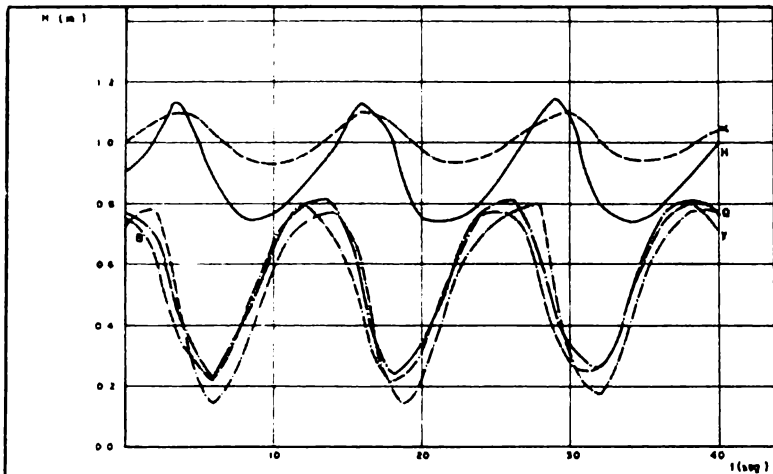
Los casos de rechazo de carga, parcial y total, presentan aumentos de presión menores que en los casos anteriores, siendo éstos de 7 y 11 m respectivamente. (Gráficas 3.5.1 y 3.6.1). En las gráficas 3.5.2 y 3.6.2 se observa que el gobernador regula perfectamente el fenómeno.

Para la aceptación de carga las disminuciones de carga presenta valores menores al anterior siendo de 5 m. (Gráfica 3.7.1). El gobernador permanece dentro de límites adecuados.

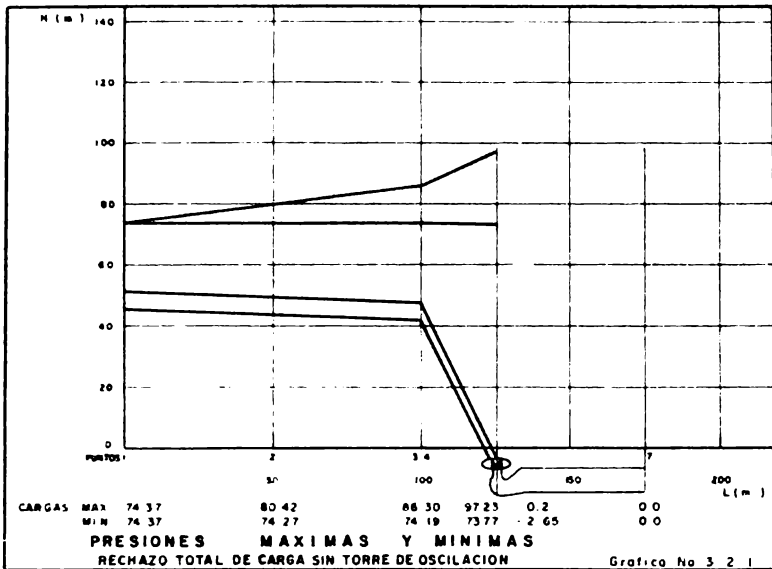
Para el caso de la falla del gobernador las disminuciones y aumentos de carga son menores que en el caso sin torre de oscilación.

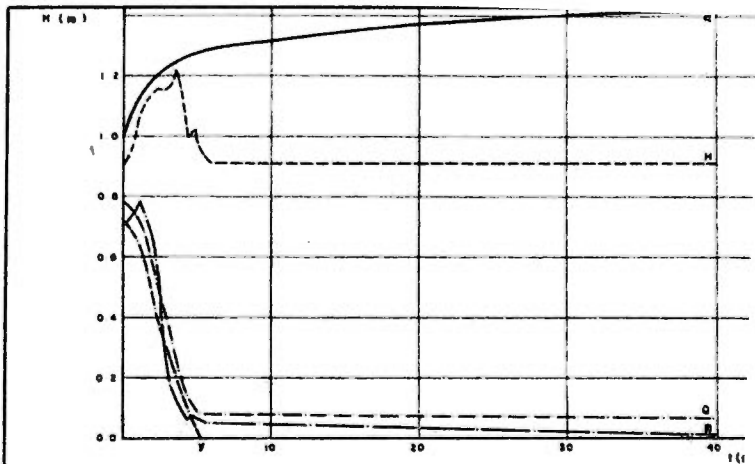
Aunque puede observarse una aceleración de la turbina, esto se debe a que los datos que permitieron calcular las curvas características presentaron una pequeña región por lo que hubo que extrapolar las curvas a fin de contar con los datos necesarios para la ejecución del programa de computadora.



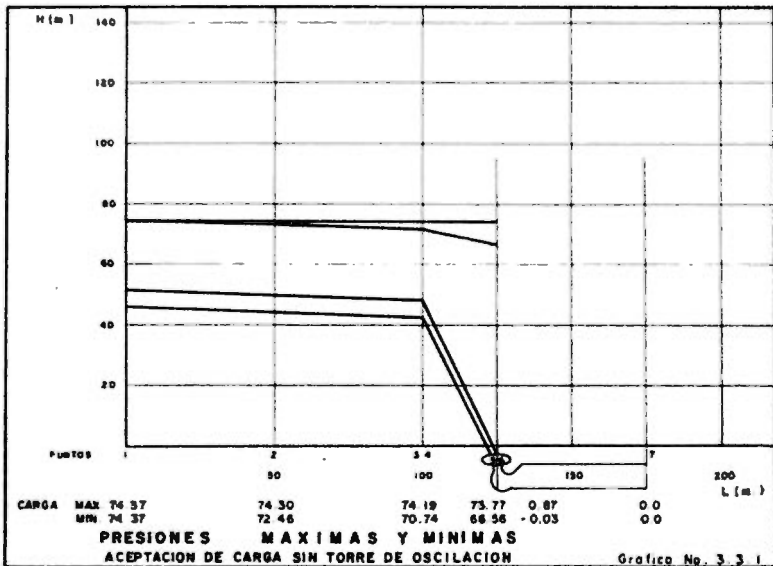


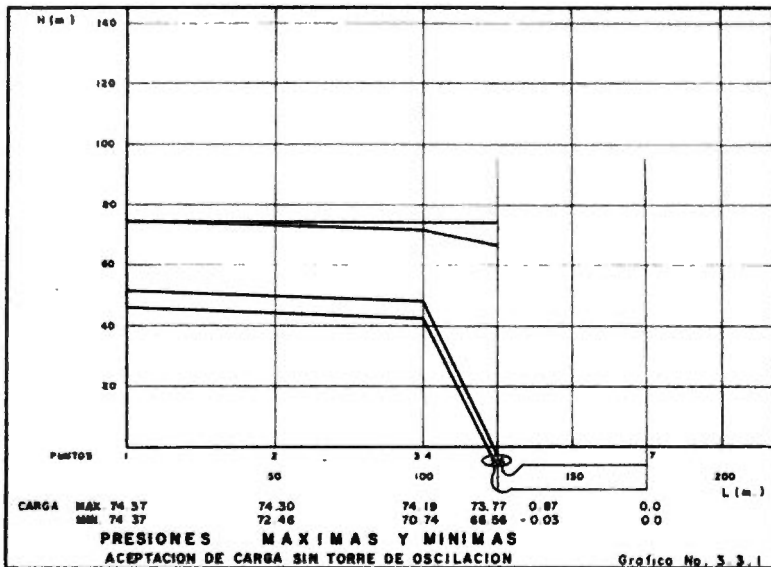
RELACIONES ADIMENSIONALES
RECHAZO PARCIAL DE CARGA SIN TORRE DE OSCILACION

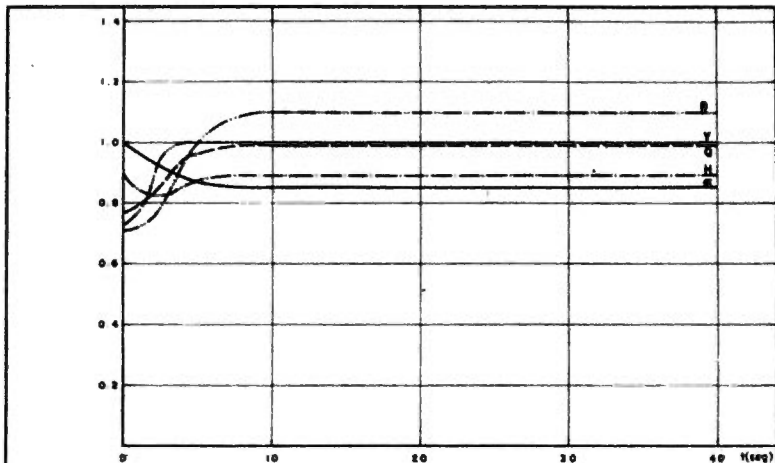




RELACIONES ADIMENSIONALES
RECHAZO TOTAL DE CARGA SIN TORRE DE OSCILACION

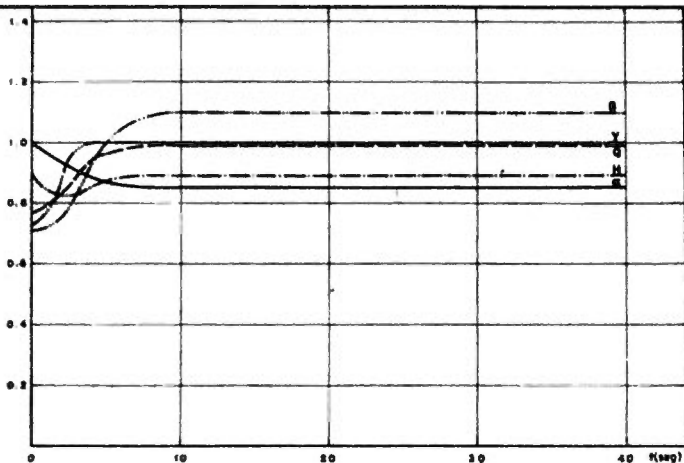




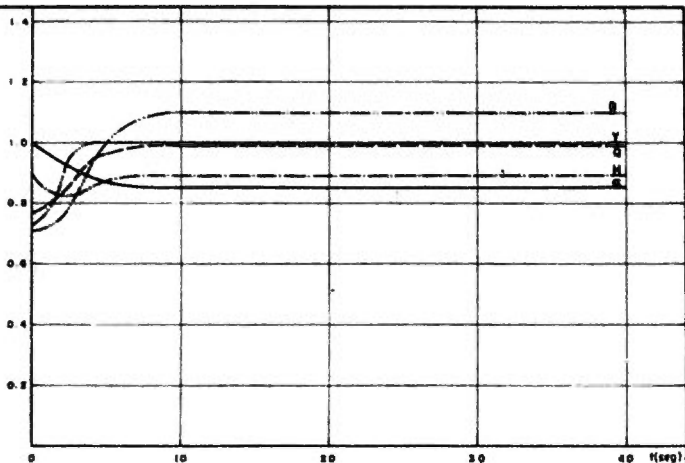


RELACIONES ADIMENSIONALES
ACEPTACION DE CARGA SIN TORRE DE OSCILACION

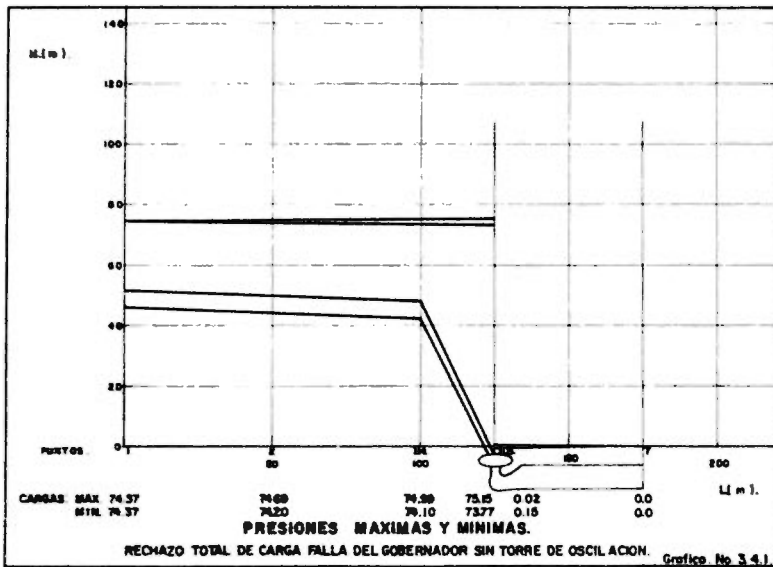
Grafica No. 3 3 2

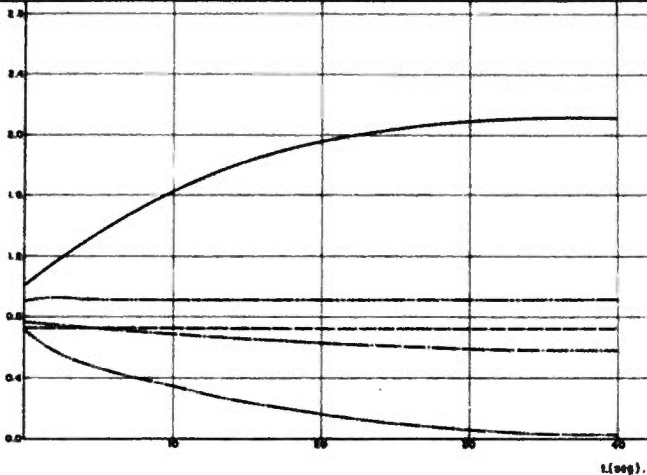


RELACIONES ADIMENSIONALES
ACEPTACION DE CARGA SIN TORRE DE OSCILACION



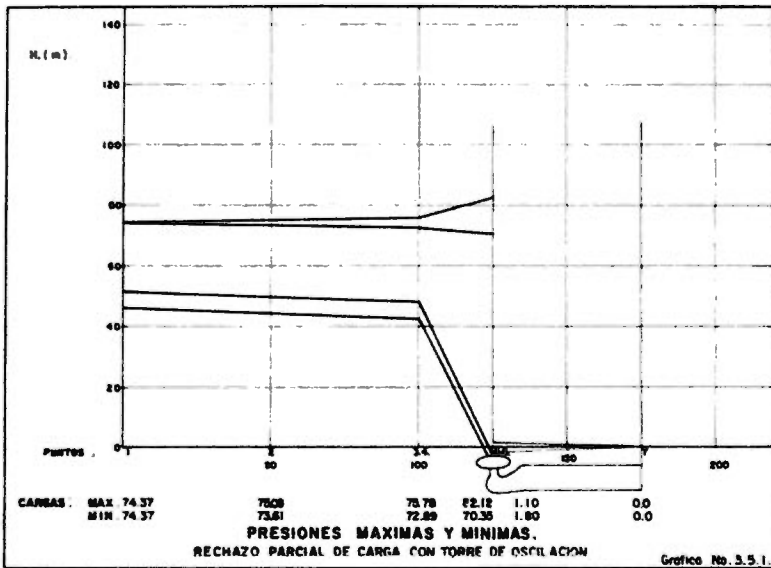
RELACIONES ADIMENSIONALES
ACEPTACION DE CARGA SIN TORRE DE OSCILACION

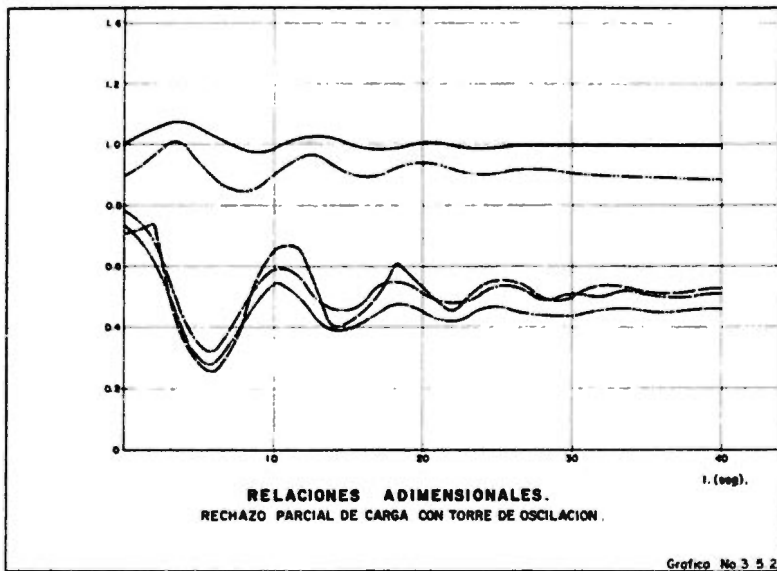


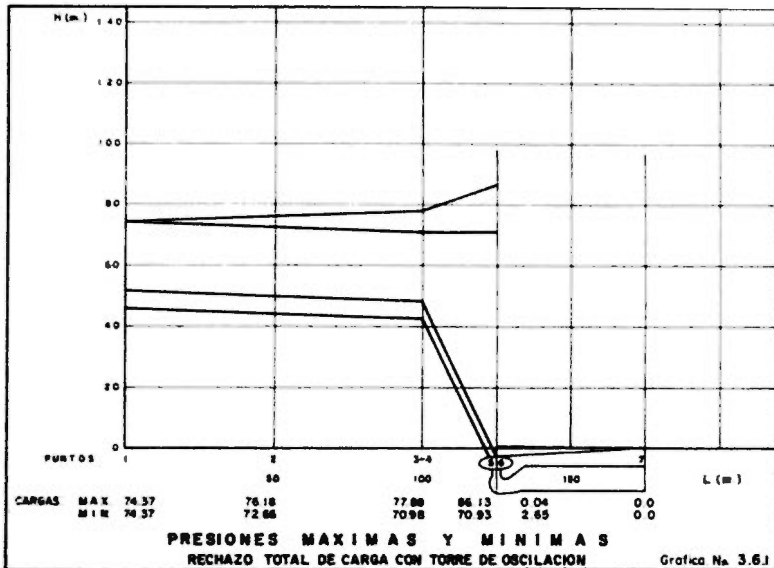


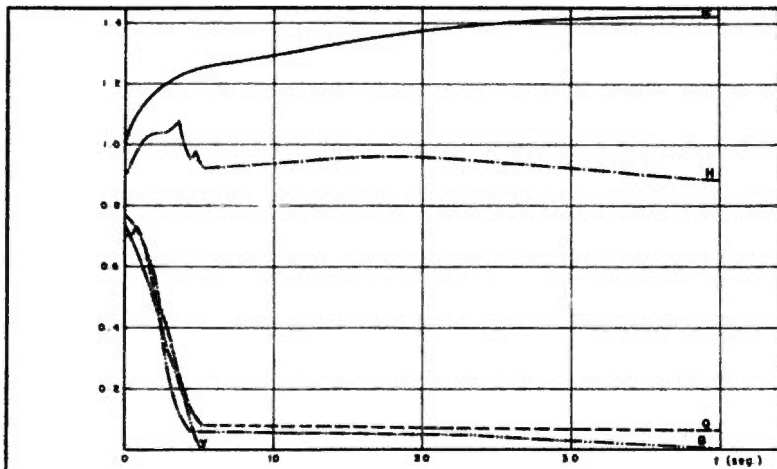
RELACIONES ADIMENSIONALES.

RECHAZO TOTAL DE CARGA FALLA DEL GOBERNADOR SIN TORRE DE OSCILACION

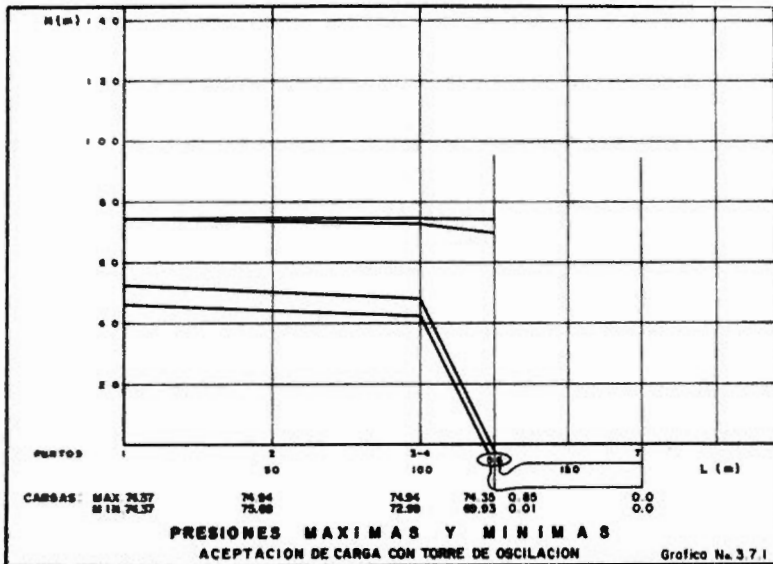


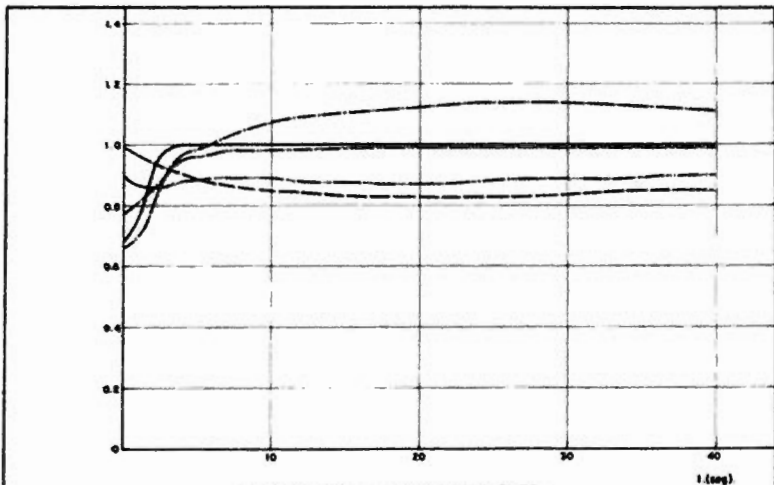




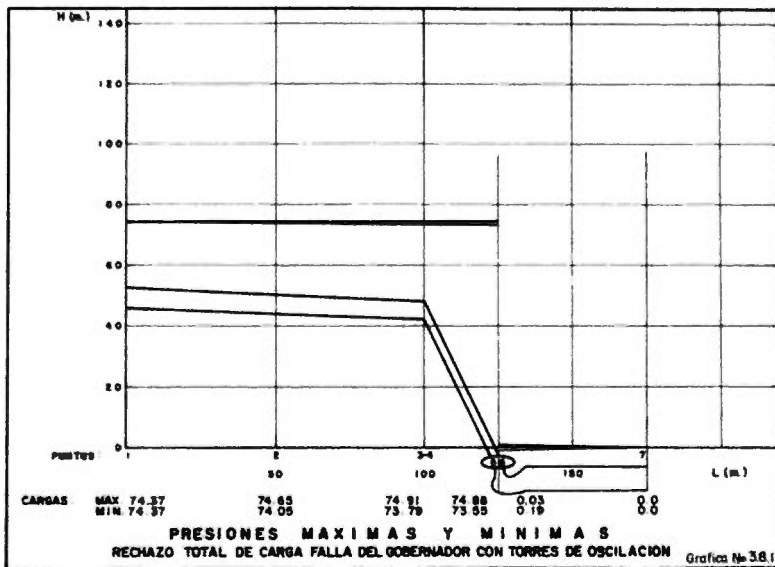


RELACIONES ADIMENSIONALES
RECHAZO TOTAL DE CARGA CON TORRE DE OSCILACION

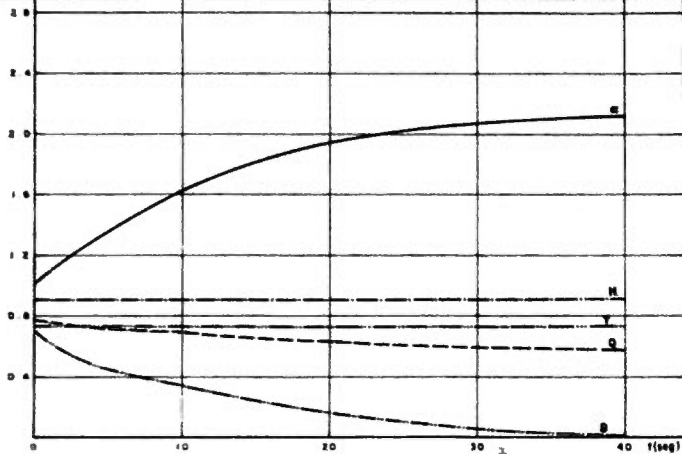




RELACIONES ADIMENSIONALES.
ACEPTACION DE CARGA CON TORRE DE OSCILACION.



3.5 PROGRAMA DE COMPUTADORA



RELACIONES ADIMENSIONALES

REDUZO TOTAL DE CARGA FALLA DEL GOBERNADOR CON TORRES DE OSCILACION


```
C      ISTRUCCION 43-720474
35 14 J=5,11
30 14 I=6,12
44J, I)=.
43=, I)=11
30 12 I=7,8,21
IF(41,GT,44(J,I),44C,44I,LT,44E(J,I+1)) GO TO 13
12 C=J*Y*Z
30 TO 14
17 I(4J,I)=0*(I-I+1)+3*(44I-44(J,I))/(44(J,I)-44(I,I))
14 C=J*Y*Z
30C=0(I)
36C=4C(I)
44I,
44O=4I
44D=4I
70=8,
C=44I,44E
18 IALP=VAL+DELTA TO
IY=I*Y*Z
I=44C*44I+44I*(44I+44I)
C=I*44C*44I/(44I+44I)
I=I*Y*Z
3Y=44I*44I
C      CALCULO DE CONDICIONES INICIALES
44Y=44C/44D
44B=3*44A/(1.+44Y*44Y)
I=44A*(44Y)
I=I*44I
44=(44I-44I)*44I/44I
30 2 J=1,4,5,7,9
44=J
C=44E(J,I)*(1.-44)+44*(44(J,I)+1)
IF(41,GT,44) 30 TO 24
22 CONTINUE
24 IF(44,EQ,1) GO TO 37
30 TO 30
34 44=1,
44(44(J,I))
44(44(J,I)+1)
GO TO 42
26 C=44B*(44I-1)*44I*(1.-44I)+44*(44I-1,1+1)
Y=DELTA*(44I-1)*44I*(44I-1)+44*(44I-1,1+1)
IF(Y,LT,.1) 44=1,
J=44I-1-Y/DELTA
IF(44,GT,44C*44I) J=44C*44I-1
C=44I-1-Y*(44I-1)*DELTA/DELTA
44(44(J,I))*(1.-44I)+44*(44(J,I)+1)
44(44(J,I)+1)*44I*(1.-44I)+44*(44(J,I)+1)
44I=44I*(44I)/44I
IF(44=1) 44I=I*(44I)+44I
44I=44I*(44I)+44I
44I=44I*(44I)+44I
44I=44I*(44I)+44I
44I=44I*(44I)+44I
```



```

DO B. I=1,NTD
DO 661 J=1,L
#(J)=M0(I)
#E=J-K
TRANT(I)
#(J)=#E-#E*PCPT(I)/TRA
661 CONTINUE
IF(I.VU.MY) GO TO 67
60 TO (120,121,143,150) IPD(I)
160 #E=H(L)
J0=J+1
#Z(J)=#E
#67(J0)=#E(L)
#AL(CV)H(L)
DO TO 121
161 CONTINUE
12# #E=H(L)
DO TO 121
127 #H(L)=#E(L)-#T*#R0
#CUT(V)Y
131 #L=0
#L=#E(I+1)+1
62 CONTINUE
#J=VVV
#J0=VVV
VVV
VJVV
V#
#E#
PRINT #2,TRA,0,CPRAE,V,VVV,MY
#2 FORMY (///,18E,1 TASP DVAAE V V #1%,/121,0,0,0,
120 VU,0,TRA,V*,07)
VTL#
C01#7)
DO 62 I=1,0,1
VTL#TTANT(I)
I*(I*(I)+.00,2) DO TO 62
C0)K0(I)
61 CONTINUE
62 #Z=0+NTY+1
#E=VVV*QSD
#E=H# HLD
PRINT #5:
#5 FORMY (///,18E,1 TASP DVAAE V V #1%,/121,0,0,0,177)
J6#7
56 J#=#0+1
777(J#)=7
#H#(J#)=H#
#Z*(J#)=07
VVV#Z#VVV#7)
#CZ(J#)=#E(C7)
#CZ(J#)=#E(K7)
#CZ(J#)=#E(L7)
#CZ(J#)=#E(K7+1)
#CZ(J#)=#E(L7+1)
#CZ(J#)=#E(K7+1)
#CZ(J#)=#E(L7+1)
VACT#Z#VVVVV
AL0(I,J#)=1

```

```

PAT(JA)=V
KLYO(JA)=BCYAO
%5TO(JA)=PGG
S(JA)=M8111
PRINT 719,(M11),I=L,NND,T
PRINT 719,(M11),I=L,NND,T
*10 FOR M1Y(IX,MP*,I)
C
CALCULO DE TRES ESTADISTICAS
95 I=01
IF (IT-GT-TMAX+DT) GO TO 195
KZ=MZ+1
DO 96 I=2,NTE
KCO=I-1
IF (TPG(KZ)-ZL*Y) GO TO 97
96 CONTINUE
IF (K=1,(ZQ,NFI) GO TO 99
97 PGG=PGG(KZ)+(T-TPS(KZ))*PG(KCO)+PS(KZ)/(TPG(KZ)+TPS(KZ))
GO TO 99
98 PGG=PG(NFI)
99 DO 81 I=1,NFI
Z2(Z)=Z/A(I)
PFR(I)=PFR(I) DELT/(Z-"O11)
61 CONTINUE
K=NT(I)
L=7
DO 84 BY=1,NTO
IF (NT(J),CO,1) GO TO 64
Z2=CEP(J)
AA=A(J)
DO 65 T=L,K
F8=V(I)-TETA(J,AA*(V(I)-W(I)+1))
W8=V(I)-TETA(J,AA*(V(I)-W(I)+1))
F9=V(I)-TETA(J,AA*(V(I)-W(I)-1))
W9=V(I)-TETA(J,AA*(V(I)-W(I)-1))
FV(I)=0.5*(V9+F8)*C2*(W9+W8)-PFR(J)*(V9*AA8(V9)+V8*AA8(V8))
W(I)=0.5*(W9+W8)*(F9-V8)/C2-(PFR(J)/C2)*(V9*AA8(V9)+V8*AA8(V8))
63 CONTINUE
64 IF (ZL=0) GO TO 67
F5=V(K+2)-TETA(J,AA*(V(K+2)-V(K)+1))
W5=V(K+2)-TETA(J,AA*(V(K+2)-V(K)+1))
F6=V(K+1)-TETA(J,AA*(V(K+1)-V(K)+1))
W6=V(K+1)-TETA(J,AA*(V(K+1)-V(K)+1))
F7=V(K+1)-TETA(J,AA*(V(K+1)-V(K)-1))
W7=V(K+1)-TETA(J,AA*(V(K+1)-V(K)-1))
Z2=CEP(J)+1
C1=PGG-C2*W5*V(K+1)+V5*W5*V(K)
Z=CEP(J)
C2=PGG+C2*W6*V(K)-V6*W6*V(K)
GO TO 67E,0.005F,37F) IF (J)
IF (J,CO,1) GO TO 71E
GO TO 69.
71E
72E
73E
74E
75E
76E
77E
78E
79E
80E
81E
82E
83E
84E
85E
86E
87E
88E
89E
90E
91E
92E
93E
94E
95E
96E
97E
98E
99E

```

```

400P4T(JU)=LT(JU)/R2+G-DT(JU)
3100VVP7P
3200P4=LT*ABT(JU)/4+*ABT(JU)
3300V3T(JU)=7*(W/2+*ABT(JU)/2+*HAL(JU)+L1+*ABT(JU)*ABT(JU)
1111
3P3=VP7/(1+*L1+1)
IF (LCA,LT,NCOS) GO TO 931
931V3T=V3T+*P3+*V3T*311+312+*V3T*V3T+*V3T*313+*V3T*314+*V3T*315
110P 1
932 FORMAT (F4.4,F6.2,F12.4,10I3,9F12.4)
933 CONTINUE
4P=0+3P*P3
3P(K+1)=C3-C4+3P
3P(K+2)=K1+C2*3P
44(K+1)=4P
44(K+2)=4P
46T(JU)=4P
4AL(JU)=*HAL(JU)-DELTA*P4T(JU)+*VP7+*V3T(JU)/(2+*ABT(JU))
V3T(JU)=3P3
IF (LCA,LT,NCOS) GO TO 931
931V3T=V3T+*P3+*V3T*311+*V3T*312+*HAL(JU)+*V3T*313+*V3T*314+*V3T*315
12) L=C
934 FORMAT (F4.4,F6.2,2I3,10I3)
935 CONTINUE
L=L+1
K=K+1*P3+311
GO TO 62
655 CONTINUE
701 *H(K+1)=(-C1+A*(J+1)+C3+*A1(J))/C2+A*(J+1)+G+*ABT(J)
*V(K+1)=C3-C4+44(K+1)
*V(K+2)=C1+C2+44(K+1)
*V(K+3)=*H(K+1)
L=L+1
K=K+1*P3+1
GO TO 62
67 IF (IPRIL,NCOS) V3P=*V3T-700
AL=2+*ALD-ALD
*V(K)=*V3P
C
- 12M32 PG
- MLC, MLC, DE LAS COEFICIENTES DE LAS CURVAS CARACTERISTICAS
DO 40 *I=1, K11
I=ABT(J)*P3+AL3
IC=AL3*W+I4E
IF (V(K+1)=0) *V(K)=
*H(K+1)=V(K)/P3+311
IF (R,GE,ABT(J)) *H(K+1)=1
*AL(K+1)=*L1+*L1)*L1/P3*V
IF (L,LT,3) GO TO 77
*H(K)=*AL+41
11000 3
*F312=L1+*L1 GO TO 77
*H(K)=*H(K)*311+312+*V3T*313+*V3T*314+315
*AL(K)=*AL(K)*311+*L1+*L1+*V3T*313+*V3T*314+315
AL=1/(1+*H(K)*P3)
AL=1+AL*P3
GO TO 78
77 *H(K)=*H(K)*311+312+*V3T*313+*V3T*314+315

```

```

0000 0001%IC=1) IL=CJ+CJ 0000%1,IC=1)
11=(000-001)/00
4.0000-01*(IC-101)00
71 43000(01,IC) (1,-CJ)+CJ=03(01,IC)
40000(01,IC=1) (1,-CJ)+CJ 00(001,IC=1)
01=000-000)/00
73=000-01*(IC-101)00
-----
C=ALYAL+000 VVV
001=000 000/00(1)
002=VVV 000/00(1)
* L=000/02=001/00+000*00 (0,01)*01-01/02-03/00
F1A=000*(2,0AL*(AC0A1*0)-01)*000
F1V=000/(00(1) C2)+000/(00(1) C0)+000*(2,0VVV*(0,01)*01*AL)
F2C=010*(01*0)0100-0100 0000/0000/000-001*0AL*01
F2A=2,0AL*(01+01-01-01)*00+010/AL*2-C11
F20=2,0VVV*(00+01)*01*AL
IF(01AL,00,1) 00 TO 70
0200=(0V-00) 000/00**0000-0000 (0,0V+00-1)*0,0*(AL+000-1,1)
L/TOTA=(AL-AL)/00-TAL)
F200*(0V-00)00-00-00-000000
F100,0'00/TOTA=1,00AL
F1V=1AL*0,0'00/0000)/TOTA+2,00
DET=01*F20-F20-F10*F20-F20
70=(F10-F20)*F20-F20*F10*F20*F20*F20*F20)000
F0=000
-----
IF(0V,00,1) 000
IF(0V,00,1) 000
IF(0V,00,1) 00 TO 70
IF(0000-00)00,000000 00 TO 70
0000+0000 00000000/0000
70 F200
DET=01*F20-F20*F20
70 0000-F1 F20 F20*F20*F20)/DET
0000-F20 F20*F20*F20 F20*F20)/DET
AL=0000
00000000
IF(0V,00,1) 000
-----
IF(0V,00,1) 000000
IF(0000(0AL)+00,0000,00,00,00) 00 TO 00
00 00000000
00 DETAC=(AL+00+000*000) (0,001) 00
000000
000000
00000000
L0000
000000
0000*(0V-00)/00-00
000000
0000
-----
F000000000
F000000000
00000000+0000/00
00000000+0000/00-00/00
L0000
000000000000
-----
00 00000000
00000000

```


DATA DEL CASO SIMULADO

DATOS DE LAS VARIABLES

COSTO VARIABLE = 116.800000
 COSTO FICHA = 22.000000
 PUNTO PROMEDIO = 10000.000000
 VALOR PROMEDIO = 10000.000000
 VALOR DE LA VARIABLE = 10000.000000

CATEGORIAS DE LOS TIPOS

	REG	REG	REG	REG	REG
TIPO 1	0.00	0.00	100.00	-0.00	0
TIPO 2	0.00	0.00	100.00	-0.00	0
TIPO 3	0.00	0.00	100.00	-0.00	0

DATOS DE LA FORMA DE DISTRIBUCION

REG CLASIFICACION SENSIBILIDAD DISTRIBUCION

1 0.00 0.00 0.00 0.00

REG	REG	REG	REG	REG	REG	REG	REG	REG	REG	REG	REG	REG
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

REGISTRO 1 2

REGISTRO 1 2

REGISTRO 1 2

REG	REG	REG	REG	REG
1	0.00	0.00	0.00	0.00

Y	M	DATE	TIME	WIND	TEMP	HUMID	WIND	TEMP	HUMID	WIND	TEMP	HUMID	WIND	TEMP	HUMID	WIND	TEMP	HUMID
01-01	Jan-01	7:07	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-02	Jan-02	7:11	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-03	Jan-03	7:15	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-04	Jan-04	7:19	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-05	Jan-05	7:23	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-06	Jan-06	7:27	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-07	Jan-07	7:31	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-08	Jan-08	7:35	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-09	Jan-09	7:39	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-10	Jan-10	7:43	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-11	Jan-11	7:47	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-12	Jan-12	7:51	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-13	Jan-13	7:55	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-14	Jan-14	7:59	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-15	Jan-15	8:03	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-16	Jan-16	8:07	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-17	Jan-17	8:11	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-18	Jan-18	8:15	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-19	Jan-19	8:19	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-20	Jan-20	8:23	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-21	Jan-21	8:27	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-22	Jan-22	8:31	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-23	Jan-23	8:35	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-24	Jan-24	8:39	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-25	Jan-25	8:43	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-26	Jan-26	8:47	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-27	Jan-27	8:51	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-28	Jan-28	8:55	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-29	Jan-29	8:59	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-30	Jan-30	9:03	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
01-31	Jan-31	9:07	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-01	Feb-01	9:11	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-02	Feb-02	9:15	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-03	Feb-03	9:19	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-04	Feb-04	9:23	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-05	Feb-05	9:27	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-06	Feb-06	9:31	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-07	Feb-07	9:35	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-08	Feb-08	9:39	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-09	Feb-09	9:43	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-10	Feb-10	9:47	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-11	Feb-11	9:51	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-12	Feb-12	9:55	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-13	Feb-13	9:59	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-14	Feb-14	10:03	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-15	Feb-15	10:07	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-16	Feb-16	10:11	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-17	Feb-17	10:15	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-18	Feb-18	10:19	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-19	Feb-19	10:23	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-20	Feb-20	10:27	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-21	Feb-21	10:31	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-22	Feb-22	10:35	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-23	Feb-23	10:39	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-24	Feb-24	10:43	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-25	Feb-25	10:47	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-26	Feb-26	10:51	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-27	Feb-27	10:55	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-28	Feb-28	10:59	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-29	Feb-29	11:03	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				
02-30	Feb-30	11:07	01	78-64	87	77	10	91	84	10-3	7-17	81	7-01	1-15				

4. CONCLUSIONES

Los tanques de oscilación protegen las tuberías y disminuyen las sobre presiones, al abatir la energía de las ondas de presión.

Los efectos del golpe de ariete se pueden reducir en gran porcentaje con cambios en la longitud de las tuberías, ya que esto influye en los tiempos de reflexión de la onda.

Para niveles más completos de proyectos, es decir, a nivel anteproyecto y proyecto es necesario analizar otros problemas susceptibles de presentarse tales como la descarga a superficie libre que genera otro tipo de transitorios; la necesidad un pozo de oscilación en el desfogue, tanto para descargas a presión o a superficie libre, en este último caso ya que la inercia de la masa de agua contenida en el desfogue, provocaría la elevación del tirante en la salida del tubo de aspiración que podría alcanzar el nivel superior del túnel, por lo que se haría necesario el tránsito del río a través del desfogue.

BIBLIOGRAFIA TESIS

1. **HYDRAULIC TRANSIENTS**
1967 Victor L. Streeter
Mc Graw-Hill E. Benjamin Wylie
2. **FLUID TRANSIENTS**
1978 Victor L. Streeter
Mc Graw-Hill E. Benjamin Wylie
3. **APPLIED HYDRAULIC TRANSIENTS**
1979 M. Hanif Chaudhry, Ph. D.
Van Nostrand Reinhold Co.
4. **MANUAL DE DISEÑO OBRAS CIVILES**
1969 Sección E. CFE
5. **NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS
PARA DISEÑO Y CONSTRUCCION DE
ESTRUCTURAS DE CONCRETO**
1971 CIC
6. **APPLIED NUMERICAL METHODS**
1969 Carnahan B., Luther H. A.
John Wiley Milkes J. O.
7. **THE SOLUTION OF HIPERBOLIC
PARTIAL DIFFERENTIAL BY
DIFFERENCE METHODS** Fox P.
Massachusetts Institute of Technology